Jaque Mate
Matemáticas

Tercer grado
Secundaria
3

LAROUSSE

Juan Carlos Xique Anaya
Ana Laura Barriendos Rodríguez
José Lorenzo Sánchez Alavez

El libro **Jaque Mate 3** es una obra creada por la Dirección Editorial de Ediciones Larousse, S.A. de C.V.
y en su realización intervinieron:

Dirección editorial
Tomás García Cerezo

Gerencia editorial de contenidos
Blanca Estela Gayosso Sánchez, María Antonieta Salas Chávez

Coordinación general de contenidos
José de Jesús Arriaga Carpio

Coordinación de contenidos de Matemáticas
Alejandro González Luna

Edición de contenidos
Alexander Clemente Torres

Exámenes PISA
Mateo Alejandro Barkovich

Coordinación pedagógica
Rosa Ela Martínez Chavarría

Coordinación de edición técnica
Héctor Rafael Garduño Lamadrid

Diseño de interiores
Elizabeth Martínez Suástegui

Formación de interiores
José Landaverde Cárdenas

Coordinación gráfica
Mónica Godínez Silva

Asistencia gráfica
Marco Antonio Rosas Aguilar

Fotografía
Mayra A. Martínez, © Archivo gráfico Larousse

Ilustración
© Archivo gráfico Larousse, Alejandro Canales Rebelo, Gustavo del Valle

Diseño de portada
Ediciones Larousse, S.A de C.V., con la colaboración de Nice Montaño Kunze

Fotografía de portada
© Shutterstock.com

ISBN: 978-607-21-0798-4

Primera edición, 2014
Primera edición revisada, 2017
Primera reimpresión, 2018

Introducción

El diseño de este libro parte de una pregunta central: ¿cuáles son los propósitos del estudio, la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria? Nuestra intención es que la clase de matemáticas de tercer grado consolide los procesos iniciados en primaria y continuados en primero y segundo de secundaria, además de aportar los aprendizajes esperados en el currículo, contribuyendo al logro del perfil de egreso de los estudiantes de educación básica.

En cada una de las lecciones se plantean actividades o situaciones que, además de representar un reto para los alumnos, intentan avivar el interés y la curiosidad creativa por resolverlo.

Las secuencias didácticas presentadas en cada lección se han diseñado para que los alumnos retomen sus conocimientos previos y, con la guía del maestro, puedan evolucionar en el transcurso de la lección. El papel del profesor para el éxito de esta propuesta es fundamental. Los estudiantes no deben ser receptores pasivos de sus explicaciones o ejercitarse sólo en el dominio de ciertas técnicas o procedimientos previamente explicados. El profesor debe plantear los problemas de las lecciones y no dar explicaciones previas de cómo resolverlos, sino promover en el aula que trabajen en equipo, elaboren conjeturas, construyan sus propios procedimientos y los pongan a prueba. Es fundamental, en este planteamiento didáctico, que los alumnos puedan interactuar con sus compañeros.

El profesor debe generar un ambiente de libertad y respeto para que los estudiantes logren expresar, escuchar y discutir sus propias ideas y las de otros compañeros. Durante el proceso de planteamiento y resolución de problemas el maestro debe escuchar a los estudiantes, identificar cuáles son las dificultades que manifiestan, los errores sistemáticos que cometen, los avances en los procedimientos que utilizan o proponen para resolver problemas y orientar constantemente el trabajo de sus alumnos con preguntas o con actividades que pongan a prueba las ideas planteadas por ellos.

Donde sea posible usar recursos tecnológicos como la geometría dinámica, la Guía Interactiva para Secundaria (GIS) o la calculadora, recomendamos ampliamente su utilización. Una buena cantidad de actividades planteadas en este libro pueden desarrollarse fácilmente aprovechando las ventajas didácticas que ofrecen ciertos entornos tecnológicos.

Cuando los estudiantes tienen la libertad de proponer maneras de resolver un problema, por lo general encontrarán diversos procedimientos en la clase, sin embargo, tales procedimientos no son infinitos, es decir, el profesor podrá identificarlos y clasificarlos para promover la confrontación en el aula.

La confrontación de resultados es un momento clave en el proceso de aprendizaje que no debe faltar en la clase de matemáticas. Es el espacio en el cual debe guiarse a los estudiantes para que reflexionen, de forma individual o en colectivo, sobre lo que realizaron al resolver el problema planteado. No es necesario que todos los alumnos tengan que presentar en plenaria el procedimiento que proponen; el profesor es quien debe seleccionar lo que se exponga, comente y discuta, es decir, se confrontará lo que considere que puede aportar a fin de que los estudiantes observen que algunos problemas son viables de resolver de diversas maneras, o bien adviertan que otros pueden tener más de una respuesta correcta o no tenerla; la confrontación de resultados les permite corregir errores frecuentes y analizar las ventajas de utilizar ciertos procedimientos en lugar de otros.

Cuando el profesor lo considere conveniente esperamos que aproveche los errores cometidos por algunos alumnos para analizarlos y no repetirlos. Cabe señalar que no todos los errores son fuente de aprendizaje, ya que algunos son producto de descuidos o distracciones y no conviene exponerlos ante el grupo, sino más bien los errores sistemáticos que reflejan una concepción equivocada.

Es importante inculcar en los estudiantes la idea de que sean ellos quienes propongan argumentos para demostrar o justificar la validez de sus procedimientos y respuestas. Cuando el profesor se percata de que están aceptando como correcto un resultado que no lo es, es importante que proponga nuevos problemas o contraejemplos, es decir, problemas que contradigan las hipótesis o argumentos equivocados de los estudiantes.

El profesor participa constantemente como guía, como fuente de información y como facilitador para la vinculación de los conceptos y procedimientos de los estudiantes con el lenguaje convencional y formal.

Otra tarea fundamental del maestro es promover las actitudes positivas, exhortando a los alumnos a trabajar siempre en colaboración y respeto, invitándolos constantemente a investigar nuevas situaciones y a plantearse nuevos problemas a partir de lo estudiado en las lecciones. El profesor tiene que ejemplificar el uso adecuado de las nuevas tecnologías y debe orientar a los estudiantes y a los padres de familia para que en el aula de cómputo o en casa aprovechen los recursos que internet ofrece para fortalecer los aprendizajes. Debe fomentar siempre la perseverancia por resolver los problemas planteados y la autonomía al asumir la responsabilidad de la validez de los procedimientos y los resultados.

Por último, la idea de emplear la terminología del ajedrez en nuestro libro de matemáticas —desde el título mismo— obedece a las semejanzas que pueden establecerse entre la disciplina matemática y el "juego ciencia": además del estudio que se requiere para volverse competente, en ambos el "jugador" se enfrenta de manera constante a problemas que debe resolver a partir de su propia experiencia e ir construyendo las soluciones más pertinentes, por ejemplo: alcanzar y defender una posición en el tablero o determinar la medida óptima para la ampliación de una foto. Tanto el ajedrez como las matemáticas favorecen la reflexión, el trabajo individual y en equipo pero, sobre todo, contribuyen al desarrollo del razonamiento para la resolución de problemas, así como en el diseño de estrategias para la toma de decisiones.

Presentación para el estudiante

Te felicitamos por continuar con éxito la etapa final de tu formación básica.

Como lo has estudiado ya en segundo grado, las matemáticas son una producción de la humanidad imprescindible para comprender nuestro mundo, y actualmente se requieren en todas las áreas del quehacer humano, por ejemplo: en múltiples actividades cotidianas, para desempeñarse de manera adecuada en la vida profesional, en la investigación y el desarrollo científicos, el arte, la producción agrícola e industrial, la prestación de servicios, las nuevas tecnologías, etcétera.

Como parte de tu formación básica, con el estudio de las matemáticas se espera que logres asumir una serie de actitudes y valores que te faciliten una integración armónica a las actividades de la vida social y promover el progreso de nuestros pueblos, ciudades y de la humanidad. Confiamos en que con este libro —junto con la profesional participación de tu profesor, el apoyo de tus padres y el interés y esfuerzo que tendrás que dedicar a tus estudios— podrás lograrlo.

Por otra parte, para alcanzar el dominio de las habilidades matemáticas previstas en el tercer grado de secundaria, hemos diseñado esta obra con la intención de que veas en la matemática tanto su utilidad práctica para resolver problemas de la vida cotidiana, profesional y científica, como la belleza que, por siglos, ha fascinado a la mente humana.

En cada lección queremos avivar tu interés por el estudio de la matemática, así como fortalecer tu tenacidad y curiosidad creativa para plantear y resolver problemas; nos interesa que desarrolles una forma de pensamiento que te permita expresar matemáticamente situaciones que se presentan en diversos contextos socioculturales, que seas capaz de utilizar técnicas adecuadas para reconocer, plantear y resolver problemas. Para lograr todo ello, es fundamental que muestres una actitud positiva y perseverante en el estudio de las matemáticas, que seas capaz de plantear problemas acerca de situaciones que te interesen vinculadas con el tema de estudio, que tengas la capacidad de escuchar a los demás y expresar tu punto de vista de manera respetuosa.

Esperamos que cada lección traiga para ti aprendizajes significativos y ganas de seguir adelante en tu formación.

Sinceramente,

Los autores

Presentación para el profesor

Conscientes de la trascendencia y el reto que implica educar a los jóvenes estudiantes de secundaria del siglo XXI en México, ponemos a su disposición *Jaque mate 3*, una propuesta didáctica a la que se ha sumado no sólo nuestra experiencia como docentes, sino el apoyo de los comentarios de colegas de diversos lugares del país.

Sabemos de su profesionalismo y coincidimos en su deseo de estimular el interés de los alumnos por el estudio de las matemáticas y el de alentarlos a asumir una actitud de constancia y creatividad frente a las actividades y problemas que les hemos preparado para cada clase. Las lecciones están conformadas por secuencias de situaciones problemáticas en las que se considera que los estudiantes pueden usar sus conocimientos previos y su creatividad. Las secuencias didácticas inician con situaciones sencillas y poco a poco se van proponiendo otras más complejas que pondrán a prueba sus primeras ideas, con la finalidad de que gradualmente modifiquen sus propios conocimientos hasta llegar a comprender y utilizar flexiblemente los mecanismos formales de las matemáticas.

Deseamos que la experiencia en clase sea amena para sus estudiantes y para usted, por lo que lo invitamos a explotar las ventajas que supone el trabajo en equipos y a promover el aprendizaje colaborativo; le proponemos crear equipos de tutores en su aula de manera que los estudiantes puedan compartir cotidianamente sus hallazgos entre pares; asimismo, en la medida en que sea posible, le sugerimos usar cada vez más las ventajas didácticas que los entornos tecnológicos brindan en la actualidad.

Atentamente,
Los autores

Índice

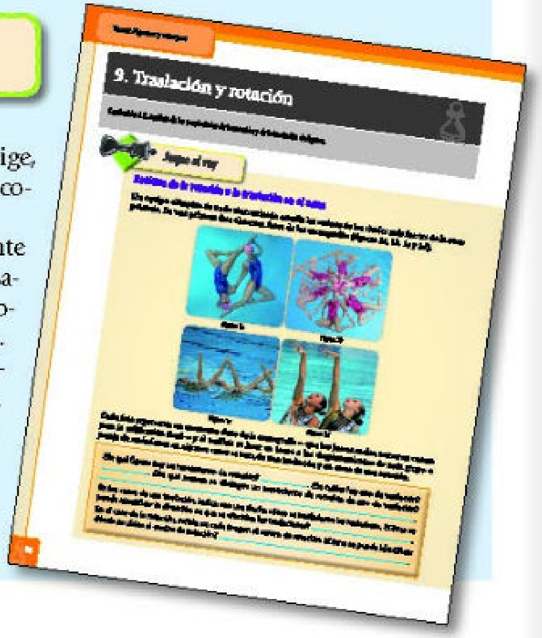
Estructura del libro

Los contenidos de estudio considerados en el currículo nacional de matemáticas para tercer grado se presentan en 33 lecciones organizadas en cinco bloques.

Al inicio de cada lección se indica el contenido curricular que se estudia.

Las lecciones están conformadas por los siguientes apartados:

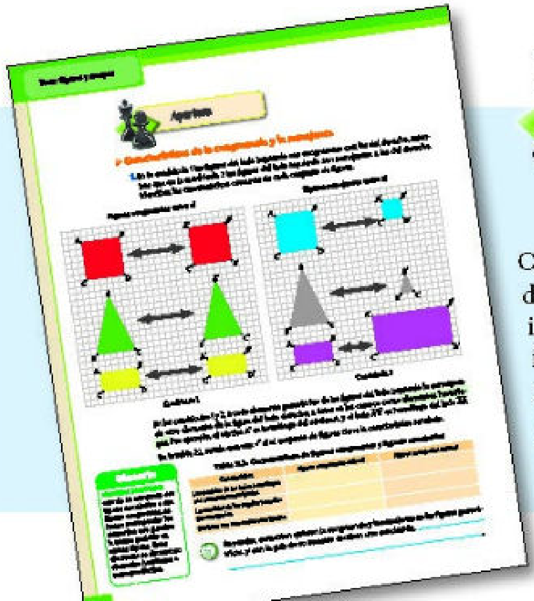
Jaque al rey



Los alumnos aprenden matemáticas cuando la situación lo exige, por tanto, en esta sección se han incluido contextos de la vida cotidiana que plantean esta exigencia.

Al tratar de resolver los desafíos de "Jaque al rey", es frecuente cometer "errores", realizar descubrimientos, practicar varios ensayos, seguir a veces caminos sinuosos, etcétera. Así que si no logras resolver este reto, no te preocupes: continúa con la lección.

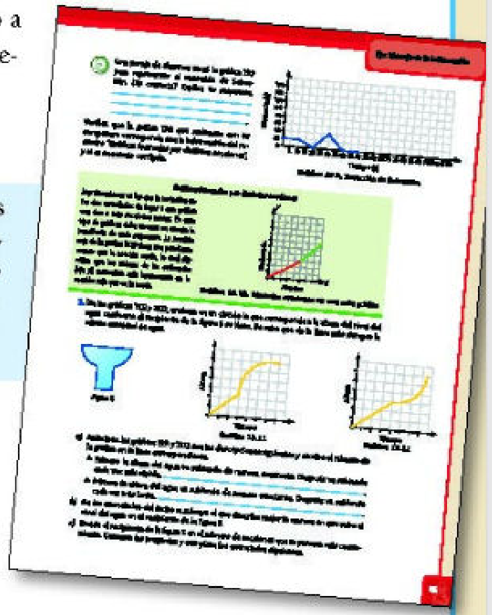
Al finalizar, en la sección "Analicemos la partida", regresaremos al problema inicial, sin embargo, ahora contarás con otros elementos que te ayudarán a resolver el problema propuesto y te percatarás de cuánto has aprendido.



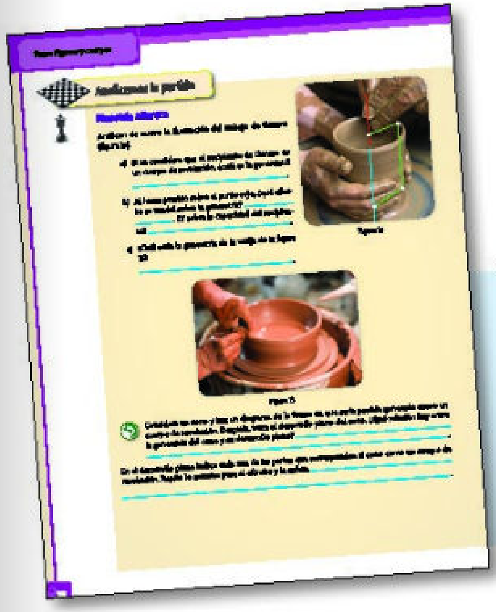
Apertura

Con esta sección se inician propiamente las secuencias didácticas para el desarrollo de los temas de la lección; es importante señalar que la gran mayoría de los problemas incluidos retoman tus conocimientos previos. Nos hemos alejado de exposiciones teóricas demasiado extensas y optamos por secuencias de situaciones problemáticas que permitan que tú mismo, junto con tus compañeros, vayan construyendo el conocimiento matemático.

Las secuencias didácticas de *Jaque mate 3* son muy diversas en cuanto a su concepción; podrás encontrar problemas, actividades o juegos diseñados para profundizar en el estudio del contenido de la lección.



También aparecen recuadros informativos que compendian aspectos clave para mejorar la comprensión de lo que se estudia; sin embargo, vale la pena precisar que no se trata de que aprendas de memoria las definiciones o apliques algoritmos de forma mecánica, sino de que comprendas las propiedades o los principios del contenido de estudio propio de la lección.



Analicemos la partida

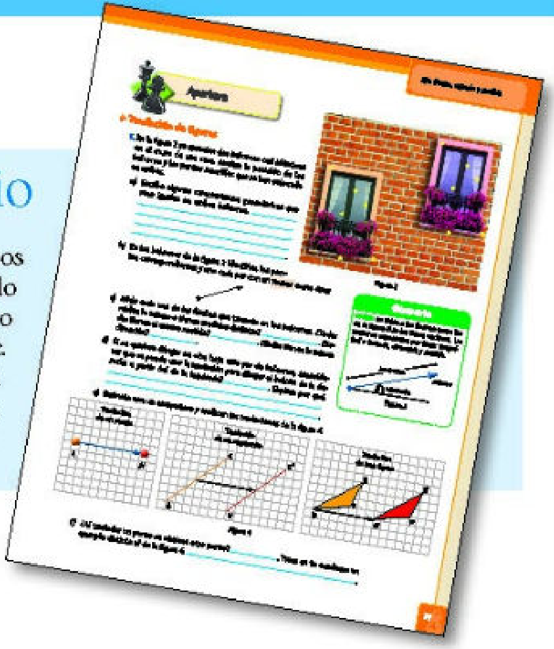
Aquí se retoma el problema de "Jaque al rey", visto al principio de la lección, con la idea de que lo resuelvas de nuevo o lo analices desde una perspectiva diferente. En algunas lecciones se presentan algunas orientaciones que te permitirán atacar de nuevo el problema.

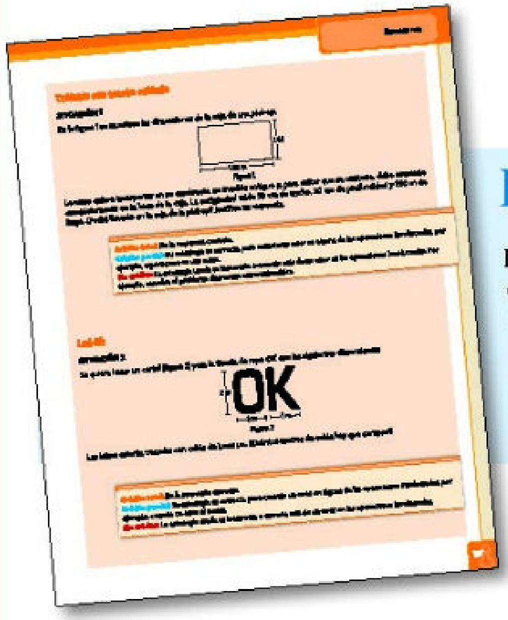
A lo largo del libro encontrarás dos elementos fundamentales representados con estos iconos:

Sabemos que lo importante es provocar en ti la reflexión sobre tus producciones y conocimientos, y para ello, la herramienta principal es la organización de actividades de análisis, discusión, confrontación, en las que deberás comunicar, probar, demostrar, etcétera; tales actividades involucran el trabajo en parejas, equipos o en plenaria, generalmente con la guía de tu profesor. Consideramos que estas reatroalimentaciones coadyuvarán a este propósito. La finalidad del segundo componente es ofrecerte la posibilidad de practicar tus destrezas en el manejo de ciertas técnicas o métodos matemáticos, pero no dejarlo al final de la lección o de un subtema, sino incluirlo como parte misma de la secuencia didáctica.

Glosario

En el libro encontrarás definiciones de algunos términos matemáticos que conviene conocer con precisión. Cuando aparecen, esos términos se destacan con un sombreado para ubicarlos rápidamente.
También localizarás conceptos matemáticos que son significativos en el contexto de los conocimientos estudiados en cada lección; podrás distinguirlos porque se encuentran en color verde.



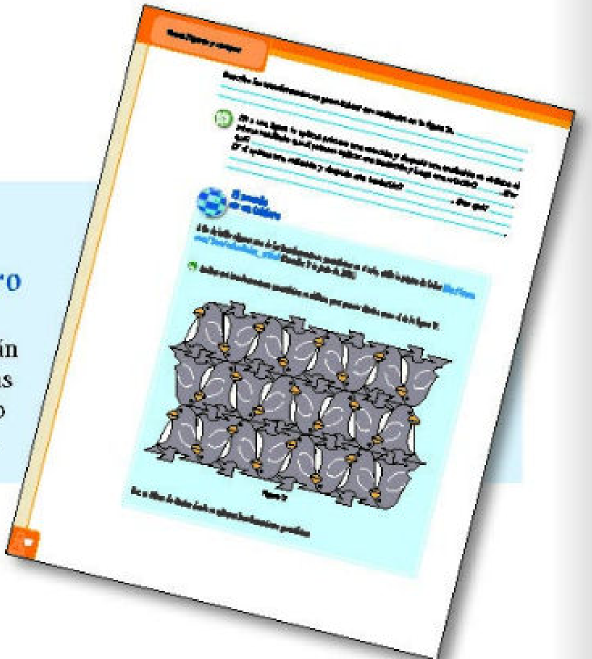


Examen PISA

Para evaluar el logro de los aprendizajes esperados, al final de cada bloque se incluye un examen similar al de PISA que el alumno presentará durante su educación secundaria. Cada prueba contiene al menos dos problemas distintos que, a su vez, se subdividen en situaciones y éstas son elementos problemáticos independientes de los que se desprenden varias preguntas o problemas.

El mundo en un tablero

En internet puedes hallar muchos recursos que fortalecerán tu estudio. En esta sección te ofrecemos algunas ligas en las que encontrarás actividades complementarias al contenido de la lección.



Dosificación de contenidos

Bloque 1

EJE	TEMA	CONTENIDO	LECCIÓN	PÁGINA	SEMANA
Sentido numérico y pensamiento algebraico	Patrones y ecuaciones	• Resolución de problemas que impliquen el uso de ecuaciones cuadráticas sencillas, utilizando procedimientos personales u operaciones inversas.	1	17	
Forma, espacio y medida	Figuras y cuerpos	• Construcción de figuras congruentes o semejantes (triángulos, cuadrados y rectángulos) y análisis de sus propiedades.	2	23	
		• Explicitación de los criterios de congruencia y semejanza de triángulos a partir de construcciones con información determinada.	3	31	
Manejo de la información	Proporcionalidad y funciones	• Análisis de representaciones (gráficas, tabulares y algebraicas) que corresponden a una misma situación. Identificación de las que corresponden a una relación de proporcionalidad.	4	37	
		• Representación tabular y algebraica de relaciones de variación cuadrática, identificadas en diferentes situaciones y fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas.	5	44	
	Nociones de probabilidad	• Conocimiento de la escala de la probabilidad. Análisis de las características de eventos complementarios y eventos mutuamente excluyentes e independientes.	6	51	
	Análisis y representación de datos	• Diseño de una encuesta o un experimento e identificación de la población en estudio. Discusión sobre las formas de elegir el muestreo. Obtención de datos de una muestra y búsqueda de herramientas convenientes para su presentación.	7	58	
		Examen PISA	–	64	

Bloque 2

EJE	TEMA	CONTENIDO	LECCIÓN	PÁGINA	SEMANA
Sentido numérico y pensamiento algebraico	Patrones y ecuaciones	• Uso de ecuaciones cuadráticas para modelar situaciones y resolverlas usando la factorización.	8	69	
Forma, espacio y medida	Figuras y cuerpos	• Análisis de las propiedades de la rotación y de la traslación de figuras.	9	76	
		• Construcción de diseños que combinan la simetría axial y central, la rotación y la traslación de figuras.	10	83	
	Medida	• Análisis de las relaciones entre las áreas de los cuadrados que se construyen sobre los lados de un triángulo rectángulo.	11	90	
		• Explicitación y uso del teorema de Pitágoras.	12	97	
Manejo de la información	Nociones de probabilidad	• Cálculo de la probabilidad de ocurrencia de dos eventos mutuamente excluyentes y de eventos complementarios (regla de la suma).	13	102	
		Examen PISA	–	107	

Bloque 3

EJE	TEMA	CONTENIDO	LECCIÓN	PÁGINA	SEMANA
Sentido numérico y pensamiento algebraico	Patrones y ecuaciones	• Resolución de problemas que implican el uso de ecuaciones cuadráticas. Aplicación de la fórmula general para resolver dichas ecuaciones.	14	111	
Forma, espacio y medida	Figuras y cuerpos	• Aplicación de los criterios de congruencia y semejanza de triángulos en la resolución de problemas.	15	117	
		• Resolución de problemas geométricos mediante el teorema de Tales.	16	124	
		• Aplicación de la semejanza en la construcción de figuras homotéticas.	17	129	
Manejo de la información	Proporcionalidad y funciones	• Lectura y construcción de gráficas de funciones cuadráticas para modelar diversas situaciones o fenómenos.	18	135	
		• Lectura y construcción de gráficas formadas por secciones rectas y curvas que modelan situaciones de movimiento, llenado de recipientes, etcétera.	19	141	
	Nociones de probabilidad	• Cálculo de la probabilidad de ocurrencia de dos eventos independientes (regla del producto).	20	150	
		Examen PISA	–	157	

Bloque 4

EJE	TEMA	CONTENIDO	LECCIÓN	PÁGINA	SEMANA
Sentido numérico y pensamiento algebraico	Patrones y ecuaciones	• Obtención de una expresión general cuadrática para definir el enésimo término de una sucesión.	21	161	
Forma, espacio y medida	Figuras y cuerpos	• Análisis de las características de los cuerpos que se generan al girar sobre un eje, un triángulo rectángulo, un semicírculo y un rectángulo. Construcción de desarrollos planos de conos y cilindros rectos.	22	168	
	Medida	• Análisis de las relaciones entre el valor de la pendiente de una recta, el valor del ángulo que se forma con la abscisa y el cociente del cateto opuesto sobre el cateto adyacente.	23	175	
		• Análisis de las relaciones entre los ángulos agudos y los cocientes entre los lados de un triángulo rectángulo.	24	181	
		• Explicitación y uso de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente.	25	188	
Manejo de la información	Proporcionalidad y funciones	• Cálculo y análisis de la razón de cambio de un proceso o fenómeno que se modela con una función lineal. Identificación de la relación entre dicha razón y la inclinación o pendiente de la recta que la representa.	26	194	
	Análisis y representación de datos	• Medición de la dispersión de un conjunto de datos mediante el promedio de las distancias de cada dato a la media (desviación media). Análisis de las diferencias de la "desviación media" con el "rango" como medidas de la dispersión.	27	201	
		Examen PISA	–	207	

Bloque 5

EJE	TEMA	CONTENIDO	LECCIÓN	PÁGINA	SEMANA
Sentido numérico y pensamiento algebraico	Patrones y ecuaciones	• Resolución de problemas que implican el uso de ecuaciones lineales, cuadráticas o sistemas de ecuaciones. Formulación de problemas a partir de una ecuación dada.	28	211	
Forma, espacio y medida	Medida	• Análisis de las secciones que se obtienen al realizar cortes a un cilindro o a un cono recto. Cálculo de las medidas de los radios de los círculos que se obtienen al hacer cortes paralelos en un cono recto.	29	217	
		• Construcción de las fórmulas para calcular el volumen de cilindros y conos, tomando como referencia las fórmulas de prismas y pirámides.	30	223	
		• Estimación y cálculo del volumen de cilindros y conos o de cualquiera de las variables implicadas en las fórmulas.	31	228	
Manejo de la información	Proporcionalidad y funciones	• Análisis de situaciones problemáticas asociadas a fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas, en las que existe variación lineal o cuadrática entre dos conjuntos de cantidades.	32	233	
	Nociones de probabilidad	• Análisis de las condiciones necesarias para que un juego de azar sea justo, con base en la noción de resultados equiprobables y no equiprobables.	33	243	
		Examen PISA	–	251	

Bloque 1

Aprendizaje esperado:

- Explica la diferencia entre eventos complementarios, mutuamente excluyentes e independientes.

Competencias que se favorecen:

Resolver problemas de manera autónoma.
Comunicar información matemática.
Validar procedimientos y resultados.
Manejar técnicas eficientemente.

Las piezas de los rompecabezas a menudo tienen figuras casi congruentes, lo cual aumenta la dificultad para armarlos y los vuelve más desafiantes. Al tomar una pieza por otra resultará imposible concluirlo o no se logrará ensamblar la imagen.

Rompecabezas de colores

1. Problemas que se resuelven con ecuaciones cuadráticas sencillas

Contenido 1.1. Resolución de problemas que impliquen el uso de ecuaciones cuadráticas sencillas, utilizando procedimientos personales u operaciones inversas.

Jaque al rey

Vasos resistentes a las ralladuras

Una diseñadora industrial debe presentar un boceto para elaborar vasos cilíndricos hechos con un polímero ultratransparente y de gran resistencia a las ralladuras, cuya altura se indica en la figura 1.

Si el volumen ideal de cada vaso debe ser de 502.4 cm^3, ¿cuánto tendrá que medir su radio? Explica el procedimiento que seguirías para encontrar la respuesta. ______________________________

____

Figura 1

Apertura

▶ Ecuaciones cuadráticas sencillas

1. Escribe los números que deben ir en los recuadros para que se cumplan las igualdades.

i) $\boxed{}^2 = 16$

ii) $\boxed{}^2 + 1 = 26$

ii) $\boxed{}^2 - 9 = 27$

a) En equipos de tres alumnos comenten el procedimiento que siguió cada quien para hallar los números faltantes. ¿En qué coincidieron sus procedimientos? ______________

____

b) Verónica afirma que en el inciso *ii* la solución de la igualdad o ecuación es –5. ¿Están de acuerdo con ella? Justifiquen su respuesta. ______

______.

¿Cómo explicarían a otros equipos que las tres ecuaciones tienen dos soluciones? Entre todos redacten una explicación y verifiquen que, numéricamente, sea correcta. Compártanla con los demás equipos y lleguen a una sola conclusión.

Uso de literales en álgebra

En lugar de colocar un recuadro, como en los incisos *i*, *ii* y *iii* de la actividad 1, en álgebra se usan *literales*. Por ejemplo, el inciso *i* podría expresarse de esta forma:

$$x^2 = 16$$

2. Un estudiante dice que la ecuación $x^2 = 81$ tiene dos soluciones, porque hay dos números que cumplen la igualdad: un número es 9 y el otro es –9.

a) En parejas, analicen si están de acuerdo con lo que afirma este estudiante. Si lo están, expliquen por qué se cumple la igualdad.

b) Comenten si es cierto que al elevar al cuadrado un número cualquiera —positivo o negativo— el resultado siempre es positivo. ¿Por qué?

Examinen con otras parejas de qué manera podrían relacionar las leyes de los signos con el resultado que encontraron en el inciso *b*. ______

______.

3. Una maestra propuso a sus estudiantes resolver la ecuación $x^2 - 11 = 25$.

a) Reúnete con dos compañeros y comparen los procedimientos que siguieron Luis y Ana para resolver dicha ecuación.

Procedimiento de Luis: En la ecuación $x^2 - 11 = 25$, x^2 representa cierto número que se eleva al cuadrado y al resultado de esta potencia hay que restarle 11 para obtener 25.

Inicié probando con el número 5 y me di cuenta de que 5^2 es 25, y si a 25 le resto 11 da 14, así que el valor de x en esta ecuación no puede ser 5.

Intenté con un número mayor que 5. Pensé en 7: 7^2 es 49, 49 menos 11 da 38, pero según la ecuación planteada debe dar 25, así que tampoco 7 es la solución buscada.

En mi tercer intento encontré que la solución es $x = 6$ o $x = -6$, porque tanto 6^2 como $(-6)^2$ dan 36, y 36 menos 11 es igual a 25.

Procedimiento de Ana: Como lo que se quiere es encontrar el valor de x (x es la incógnita ya que no se sabe qué valor le corresponde en la ecuación $x^2 - 11 = 25$), lo que debo hacer es despejar x.

Para ello, sumé 11 en cada miembro de la ecuación $x^2 - 11 + 11 = 25 + 11$ y de este modo obtuve que $x^2 = 36$. Posteriormente, pensé qué número elevado al cuadrado me da 36. Hallé que las soluciones de la ecuación son $x = 6$ o $x = -6$.

b) Comenten con otros equipos los procedimientos que siguieron Luis y Ana. ¿Cuál les pareció más eficaz? Justifiquen su respuesta. ______

______.

c) Al resolver los incisos *i* y *iii* de la actividad 1, ¿realizaron algún procedimiento semejante al de Luis o Ana? ______ Expliquen por qué. ______

______.

Después de analizar tanto los procedimientos como los resultados de Luis y Ana, ¿qué pueden concluir respecto al número de soluciones que tiene una ecuación de segundo grado? ______.

4. Analiza los conjuntos de ecuaciones de cada recuadro y define qué es una ecuación cuadrática o de segundo grado.

Comienza así tu definición: "Se llama ecuación cuadrática o de segundo grado a la expresión algebraica que... ______

______".

Éstas no son ecuaciones cuadráticas o de segundo grado:

- $2x = 10$
- $x + 2 = 8$
- $x^3 + x^2 = 12$
- $\sqrt{x^2} = 25$

Éstas sí son ecuaciones cuadráticas o de segundo grado:

- $x^2 = 25$
- $3x^2 = 75$
- $x^2 + x - 12 = 0$
- $x^2 + x^2 = 72$
- $x(x + 5) = 14$

En grupo y con la guía de su maestro, contrasten la definición que escribieron con la de otros compañeros y con la información del glosario. Si omitieron algún aspecto importante en la definición, realicen las correcciones necesarias.

5. Escribe una ecuación que permita resolver los acertijos planteados en los incisos *a* y *b*.

a) Pensé un número y lo elevé al cuadrado. Si al resultado le resté 2 y me dio 119, ¿qué número pensé? ______.

b) Pensé un número y lo elevé al cuadrado; el resultado lo multipliqué por 2 y al final obtuve 288. ¿Qué número pensé?

______.

Compara las ecuaciones que escribiste con las de otro compañero y comprueben que sean correctas. Expliquen el procedimiento que siguieron.

¿Son cuadráticas las ecuaciones que escribieron? Expliquen por qué. ______

______.

Verifiquen que con las ecuaciones escritas sea posible resolver los acertijos planteados. ¿Los acertijos tienen una solución única o varias soluciones? ______.

- Para el acertijo del inciso *a* el número o los números que se pensaron pueden ser: ______ o ______.
- Para el acertijo del inciso *b* el número o los números que se pensaron pueden ser: ______ o ______.

6. En parejas, escriban la ecuación con que puede resolverse cada uno de los siguientes problemas y resuélvanlos.

a) Se tiene un triángulo cuya área es de 60.5 cm^2. Si se sabe que su base y su altura miden lo mismo, ¿cuánto mide su altura? ______

Glosario

ecuación cuadrática o de segundo grado: igualdad en la que al menos una de las incógnitas aparece elevada al cuadrado y las demás con exponentes menores o iguales que 2. Los términos están relacionados sólo mediante sumas, restas, multiplicaciones o divisiones.

Ejemplo: $x^2 + 7x - 18 = 0$

Comenta con otro compañero lo que se afirma en este glosario y compáralo con lo que escribieron en su definición. ¿Por qué la ecuación $\sqrt{x^2} = 25$ no es una ecuación cuadrática?

______

______.

¿Fue necesario resolver una ecuación de segundo grado en este problema? ________. Si su respuesta es afirmativa, escríbanla. ________________________.

b) Jocelyn deja caer una pelota de un edificio cuya altura es de 30 m y desea saber el tiempo *t* que tardará en chocar contra el piso.

Consideren que la relación entre el tiempo *t* que tarda en caer un cuerpo en caída libre desde una altura *h* se puede representar por medio de la expresión algebraica:

$$h = \frac{1}{2}gt^2$$

donde *g* es la constante de gravitación debida a la fuerza de atracción terrestre y su valor es $9.81 \frac{m}{s^2}$.

¿Cuánto tiempo tardará en llegar al piso la pelota que dejó caer Jocelyn del edificio? ________.

¿Es $h = \frac{1}{2}gt^2$ una ecuación de segundo grado? ________. ¿Fue necesario resolver una ecuación de segundo grado en este problema? ________. Si su respuesta es afirmativa, escríbanla. ________________________.

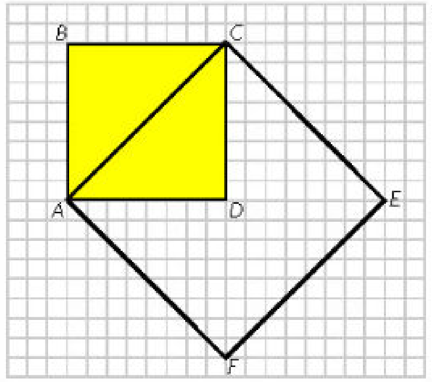


Figura 2

c) Analicen los cuadrados de la figura 2.

i) ¿Qué segmento corresponde a una de las diagonales del cuadrado *ABCD*? ________________

ii) Si *d* representa la medida de la diagonal del cuadrado *ABCD*, escriban una fórmula para el área del cuadrado *ACEF*.

____

iii) ¿Cuántas veces es más pequeña el área del cuadrado *ABCD* respecto al área del cuadrado *ACEF*?

____

iv) Propongan una fórmula para calcular el área de cualquier cuadrado a partir de la medida *d* de su diagonal.

$A =$

¿La fórmula que escribieron es una ecuación de segundo grado? __________ ¿Por qué?

____

Posteriormente, con la fórmula que propusieron calculen el área de la figura 3 y verifiquen que su fórmula sea correcta.

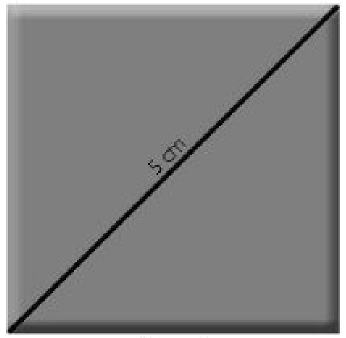


Figura 3

v) Si el área de un cuadrado mide 100 cm², ¿cuál es la longitud de su diagonal?

____

¿Fue necesario resolver una ecuación de segundo grado en el inciso *v)*? ________. Si su respuesta es afirmativa, escriban la ecuación. ________________________.

¿Las soluciones de las ecuaciones que plantearon en los incisos *a* y *b* coinciden con la solución de los problemas? Expliquen por qué.

Comenten con otros equipos qué significa resolver una ecuación de segundo grado.

¿Qué diferencia existe entre hallar las soluciones de una ecuación de segundo grado y resolver un problema que puede modelarse con una ecuación cuadrática? ________________

____

6. Indaga si cada una de las siguientes ecuaciones tiene dos soluciones. Si las tiene, encuéntralas.

a) $x^2 - 16 = 0$ $x_1 =$ ________. $x_2 =$ ________

b) $x^2 - 121 = 30$ $x_1 =$ ________. $x_2 =$ ________

c) $x^2 = 10\,000$ $x_1 =$ ________. $x_2 =$ ________

d) $3x^2 = 75$ $x_1 =$ ________. $x_2 =$ ________

e) $x^2 + x = 12$ $x_1 =$ ________. $x_2 =$ ________

f) $x^2 + x^2 = 72$ $x_1 =$ ________. $x_2 =$ ________

Reúnete con un compañero y comenten qué estrategia siguió cada uno para encontrar las soluciones de estas ecuaciones. Después verifiquen que las respuestas dadas sean correctas.

7. Escribe un problema que pueda resolverse con cada una de las ecuaciones de la tabla 1.1.

Tabla 1.1. Ecuaciones cuadráticas y problemas que pueden resolverse con ellas

Ecuación cuadrática	Problema
$x^2 = 81$	
$2x^2 = 50$	
$3x^2 + 2 = 14$	

Comparte los problemas que redactaste con otro compañero y verifiquen que, efectivamente, correspondan a las ecuaciones propuestas.

El mundo en un tablero

Para mejorar tus habilidades en el planteamiento y resolución de problemas que implican ecuaciones cuadráticas sencillas, visita la página http://www.disfrutalasmatematicas.com/algebra/ecuaciones-cuadraticas.html (Consulta: 22 de junio de 2013.)

¿Existen distintos tipos de ecuaciones cuadráticas o de segundo grado? ________________.
¿Cuáles son las diferencias entre ellas? ________________________.

Analicemos la partida

Vasos resistentes a las ralladuras

En equipos de tres alumnos, analicen de nueva cuenta el problema de "Jaque al rey". Recuerden cómo se calcula el volumen de un cilindro (figura 4) y escríbanlo a continuación.

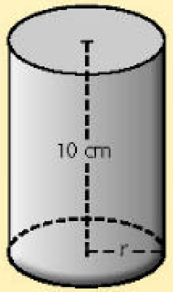


Figura 4

VOLUMEN DE UN CILINDRO = ______________________.

- ¿Qué forma tiene la base de un cilindro? ______________________.
- ¿El radio del cilindro mide lo mismo que el radio de la base? ______________________.
- ¿Cuál es el procedimiento para saber cuánto mide el área de la base de este cilindro, cuyo volumen es de 502.4 cm^3 y su altura de 10 cm? ______________________.
- ¿Cuál es el área de la base de este cilindro? ______________________.
- Recuerden cómo se calcula el área de un círculo y escríbanlo aquí.

ÁREA DE UN CÍRCULO = ______________________.

- Escriban la ecuación con que se calcula el radio del círculo, que es la base de este cilindro. ______________________
- ¿Cuánto mide el radio del cilindro? ______________________.

Reúnete con otros compañeros y verifiquen que las respuestas a las preguntas anteriores y al problema planteado sean correctas.

2. Congruencia y semejanza

Contenido 1.2. Construcción de figuras congruentes o semejantes (triángulos, cuadrados y rectángulos) y análisis de sus propiedades.

Jaque al rey

La misma pero más pequeña

Gonzalo debe terminar de construir la maqueta de una casa como la que se muestra en la figura 1.


Figura 1

En la figura 2 aparecen las piezas con que piensa armar la maqueta.

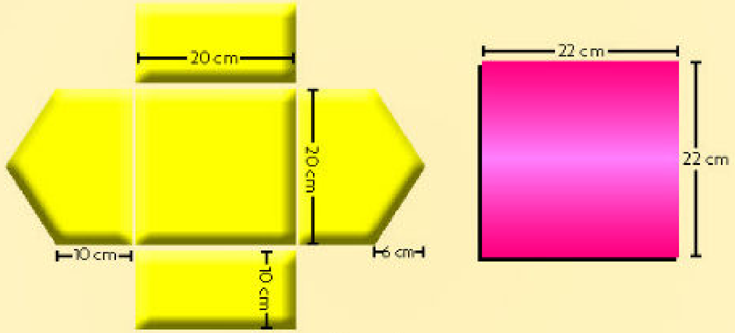


Figura 2

Sin embargo, en el último momento, la jefa del proyecto le pide a Gonzalo hacer un cambio en las medidas.

—Necesitamos que las piezas que miden 20 cm en el plano de la figura 2 midan 15 cm en la maqueta que vamos a presentar a los inversionistas de este proyecto.

¿Cómo son las piezas que Gonzalo debe trazar para construir la maqueta que le pidió la jefa del proyecto: semejantes o congruentes? ______________________.

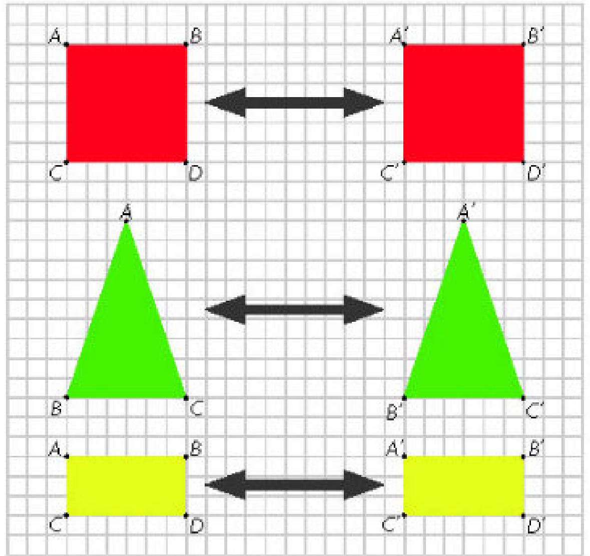
¿Por qué número hay que multiplicar la medida de cada lado para determinar las nuevas dimensiones de las piezas de la maqueta que debe elaborar Gonzalo? ______________________.

Apertura

Características de la congruencia y la semejanza

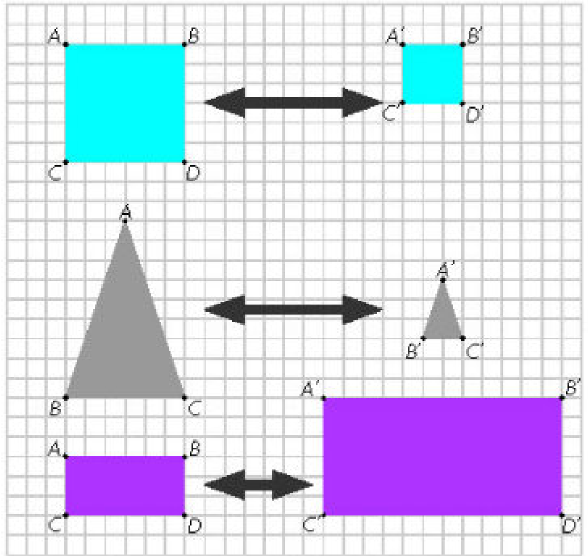
1. En la cuadrícula 1 las figuras del lado izquierdo son congruentes con las del derecho, mientras que en la cuadrícula 2 las figuras del lado izquierdo son semejantes a las del derecho. Identifica las características comunes de cada conjunto de figuras.

Figuras congruentes entre sí



Cuadrícula 1

Figuras semejantes entre sí



Cuadrícula 2

En las cuadrículas 1 y 2, a cada elemento geométrico de las figuras del lado izquierdo le corresponde otro elemento de la figura del lado derecho; a éstos se les conoce como elementos homólogos. Por ejemplo, el vértice *A′* es homólogo del vértice *A*, y el lado $\overline{A'B'}$ es homólogo del lado $\overline{AB}$.

En la tabla 2.1, señala con una ✓ si el conjunto de figuras tiene la característica señalada.

Glosario

elementos homólogos: cuando se comparan dos figuras semejantes o dos figuras congruentes, se hacen corresponder los elementos que guardan la misma posición en ambas figuras. Estos elementos se denominan elementos homólogos o correspondientes.

Tabla 2.1. Características de figuras congruentes y figuras semejantes

Característica	Figuras congruentes entre sí	Figuras semejantes entre sí
Las medidas de los lados homólogos son necesariamente iguales.		
Las medidas de los ángulos homólogos son iguales.		
Sus áreas son necesariamente iguales.		

En parejas, comenten qué son la congruencia y la semejanza en las figuras geométricas, y con la guía de su maestro escriban una conclusión. ______

______

Para responder las siguientes preguntas, apóyense en las figuras de las cuadrículas 1 y 2 y en los resultados de la tabla 2.1.

a) ¿Un par de figuras que son congruentes entre sí son al mismo tiempo semejantes?

b) ¿Dos figuras que son semejantes entre sí son necesariamente congruentes?

El mundo en un tablero

En las siguientes páginas encontrarás explicaciones adicionales sobre los conceptos de congruencia y semejanza, así como ejercicios para practicar lo estudiado. (Consulta: 12 de noviembre de 2013.)
http://matematicasactividades.blogspot.mx/
http://supermateoh.blogspot.mx/2009/10/diferencia-entre-semejanza-y.html

En parejas, analicen cómo se puede determinar si dos figuras son congruentes o semejantes. Comparen sus procedimientos con los de otros compañeros y lleguen a una conclusión.

Construcción de figuras congruentes y semejantes

1. Reúnete con tres compañeros y recuerden qué es un paralelogramo. Cada uno debe trazar un paralelogramo distinto en un pedazo de cartulina y después recortarlo.

Posteriormente, tracen una de las diagonales del paralelogramo, recórtenlo por esta línea y analicen las figuras resultantes (figura 3).

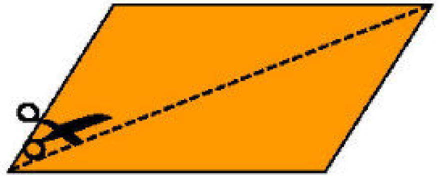


Figura 3

a) ¿Es posible superponer las figuras geométricas que se obtuvieron después de recortar la figura 3 de manera que parezcan una sola? ______ ¿Qué significado tiene esto? ______

b) ¿Cómo son las figuras geométricas resultantes: congruentes o semejantes? ______ Justifiquen su respuesta. ______

¿Qué argumentos matemáticos se podrían dar para afirmar que los triángulos obtenidos son congruentes? ______

______

2. ¿Qué medidas tendrías que tomar y qué trazos harías para obtener figuras geométricas congruentes a las que se muestran en la figura 4? ______

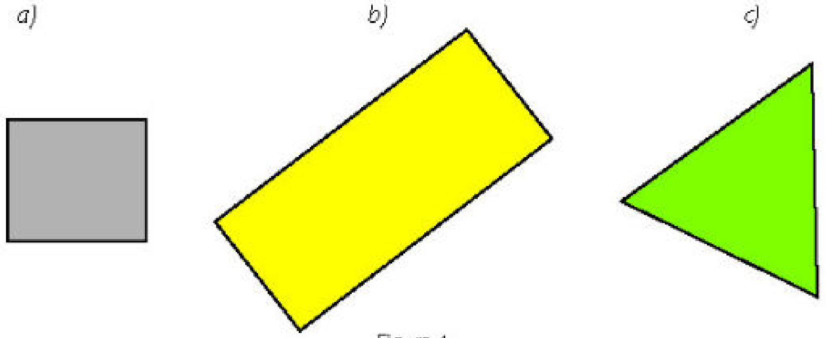


Figura 4

En una hoja traza y recorta una de las figuras anteriores y luego verifica que sean congruentes.

Reúnete con un compañero y comenten cómo trazaron las figuras *a*, *b* y *c*. ¿En todos los casos se necesita tomar las mismas medidas? ¿Cuáles son indispensables en cada figura?

3. En equipos de cuatro alumnos lleven a cabo la siguiente actividad. Cada uno de los integrantes debe tener tijeras y cartulina u hojas para recortar. Dibujen y recorten un rectángulo cuidando que ninguno sea del mismo tamaño.

Al terminar de recortarlos, tracen en cada rectángulo sus diagonales: una de color rojo y otra de color azul (figura 5).

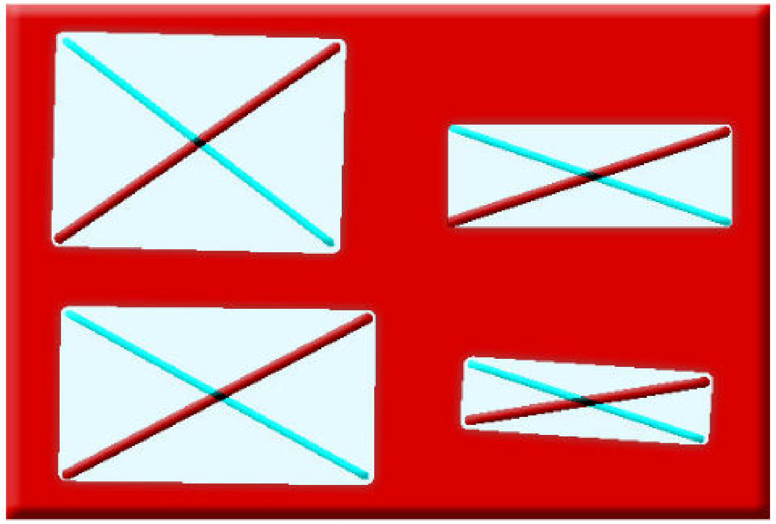


Figura 5

Coloquen los rectángulos que cortaron de manera que, al superponerlos, las diagonales formen una sola recta roja y otra azul, como se muestra en la figura 6.

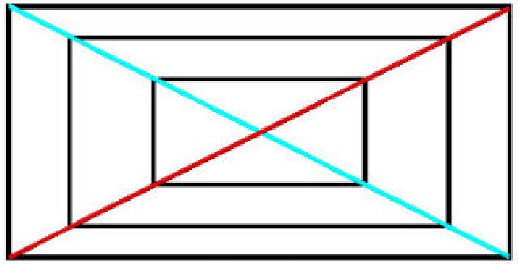


Figura 6

Si en su equipo les quedó de otra forma —como en la figura 7—, respondan las preguntas que se plantean:

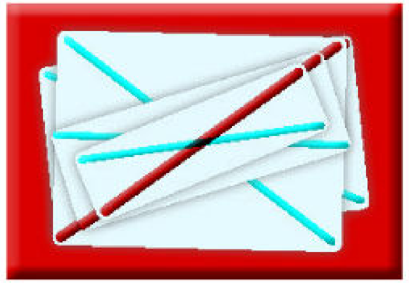


Figura 7

a) Comenten por qué al superponer todos los rectángulos no se formó al mismo tiempo una sola recta roja y otra azul.

b) Pónganse de acuerdo entre ustedes y recorten otros rectángulos de tal manera que puedan alinear las diagonales como se ilustra en la figura 6. ¿Qué características deben tener los cuatro rectángulos para que sus diagonales puedan alinearse? ______

______

c) En la tabla 2.2 se presentan las medidas del largo y el ancho de distintos rectángulos. ¿Cómo completarían las medidas faltantes de modo que las diagonales de los rectángulos que se forman puedan alinearse?

Tabla 2.2. Medidas del largo y el ancho de diferentes rectángulos

Ancho	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Largo		12		24		36							

¿Por qué número se debe multiplicar cada una de las medidas del ancho para dar como resultado la medida correspondiente del largo? ______

¿Qué característica debe tener cualquier conjunto de rectángulos distintos para que sus diagonales se puedan alinear? ______

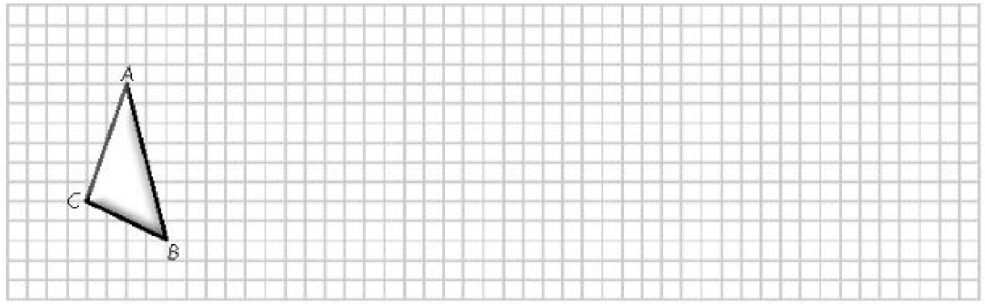
Contrasten sus respuestas con las de otros equipos. Si las respuestas no coinciden, lean el siguiente recuadro y establezcan —con la ayuda de su maestro— de qué manera la constante de proporcionalidad puede servir para determinar si, dados dos rectángulos distintos, es posible alinear sus diagonales.

Constante de proporcionalidad y variación proporcional

Cuando dos cantidades se relacionan de manera proporcional, el cociente entre ellas es constante, es decir, siempre es el mismo. Este cociente se llama **constante de proporcionalidad**.

Dos valores varían de forma **directamente proporcional** si cuando uno aumenta o disminuye, el otro también lo hace, y la razón entre ambos valores siempre es la misma.

4. En la cuadrícula 3 traza dos triángulos distintos que sean semejantes al triángulo *ABC*.



Cuadrícula 3

Comenta con otro compañero cómo podrían justificar que estos triángulos son semejantes entre sí. Escriban aquí su conclusión. ______

______

5. En la figura 8 se ilustra un método para construir cuadrados, en tanto que en la figura 9 se muestra otro para construir triángulos equiláteros.

a) ¿Los cuadrados trazados son semejantes? ¿Por qué? ______________________

____

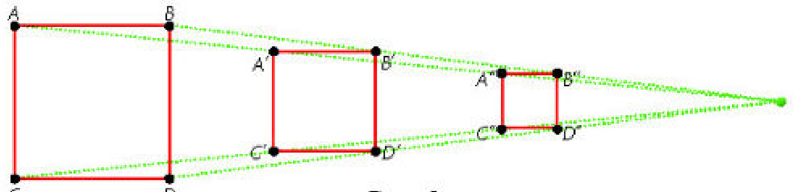


Figura 8

b) Independientemente de la forma en que se tracen, ¿todos los cuadrados son semejantes entre sí? Justifica tu respuesta. ______________________

____

c) ¿Los triángulos trazados son semejantes? Explica por qué. ______________________

____

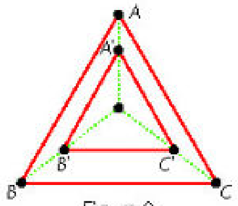


Figura 9

d) Mariana afirma que todos los triángulos equiláteros son semejantes. ¿Es cierta o falsa esta afirmación? Justifica tu respuesta. ______________________

Escribe en tu cuaderno cuáles son las semejanzas y las diferencias entre estos métodos. ¿Cómo le explicarías a otro compañero qué pasos debe seguir para usar cada uno de estos métodos?

¿Ambos métodos podrían servir para trazar cualquier figura semejante a otra? ________. ¿Por qué? ______________________

____

El mundo en un tablero

En la siguiente dirección encontrarás explicaciones para hacer dibujos en perspectiva con un punto de fuga, un método que puede servirte para trazar figuras semejantes.
http://www.dibujarfacil.com/perspectiva1.html (Consulta: 22 de junio de 2013.)
¿Por qué los objetos en un dibujo suelen tener distintos tamaños? ¿Para qué sirve la perspectiva con un punto de fuga? ¿Qué relación guarda este método de dibujo con el método para dibujar figuras semejantes de las figuras 8 y 9?

6. En parejas, analicen la figura 10 y respondan las preguntas que se formulan.

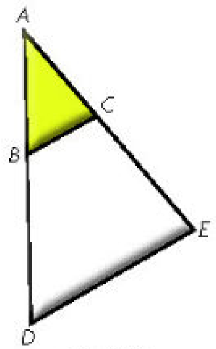


Figura 10

a) En la figura 10, el segmento $\overline{BC}$ es paralelo al segmento $\overline{DE}$. ¿Los triángulos *ABC* y *ADE* son semejantes entre sí? Justifica tu respuesta. ______________________

b) Traza un nuevo segmento $\overline{FG}$ que sea paralelo al lado $\overline{DE}$ y que corte al triángulo. ¿Piensas que el triángulo *AFG* es semejante al triángulo *ADE*? ________. ¿Por qué?

____

____

c) Traza en una cartulina dos triángulos rectángulos congruentes y recórtalos. Después toma uno de los triángulos rectángulos y traza su altura considerando como base la hipotenusa y recórtalo, como se ilustra en la figura 11*a*.

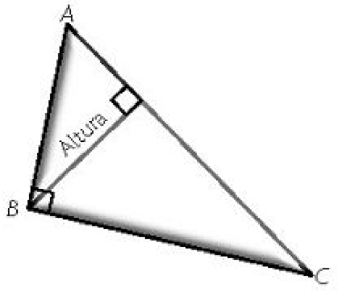


Figura 11*a*

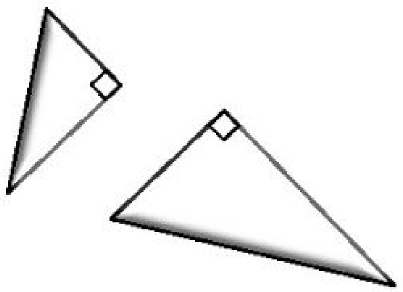


Figura 11*b*

¿Los dos triángulos que obtuviste son semejantes entre sí (figura 11*b*)? ________ ¿Los triángulos menores son semejantes al triángulo más grande? Justifica tus respuestas.

____

Reúnete con un compañero y analicen esta afirmación: "Si dos lados de un triángulo se cortan mediante una recta paralela al tercero, entonces se obtiene un triángulo semejante al primero". ¿Qué argumentos matemáticos podrían darse para mostrar la veracidad del enunciado? ______________________

El mundo en un tablero

En la siguiente dirección encontrarás aplicaciones de la semejanza a la vida cotidiana.
http://matematicahumbertoluna.blogspot.mx/2010/07/semejanza-de-triangulos.html (Consulta: 22 de junio de 2013.)

Comenta con otros compañeros en qué casos resulta de utilidad la semejanza o la congruencia.

Analicemos la partida

La misma pero más pequeña

Dibuja en tu cuaderno cada una de las piezas con las medidas que aparecen en la figura 2.

Utiliza algún método para dibujar varias figuras semejantes entre sí y registra sus medidas en las tablas 2.3 y 2.4. Después, responde las preguntas.

Tabla 2.3. Medidas del largo y el ancho de varios rectángulos semejantes entre sí

	Rectángulo 1	Rectángulo 2	Rectángulo 3	Rectángulo 4	Rectángulo 5
Largo					
Ancho					

Tabla 2.4. Medidas de los lados de varios pentágonos semejantes entre sí

	Pentágono 1	Pentágono 2	Pentágono 3	Pentágono 4	Pentágono 5
Lado 1					
Lado 2					
Lado 3					
Lado 4					
Lado 5					

a) ¿Las medidas del largo y el ancho de los rectángulos son proporcionales? ______.

b) ¿Las medidas de los lados de los pentágonos son proporcionales? ______.

c) ¿En cada caso hay una constante de proporcionalidad? ______. Si existe, ¿cuánto vale y cómo se determina? ______

______.

d) Si el largo de un rectángulo mide 20 cm y se desea construir uno semejante cuyo largo mida 15 cm, ¿cuánto debe medir el ancho del nuevo rectángulo si el original mide 10 cm?

En parejas respondan, con la guía de su maestro, las preguntas que se plantean.

- Si dos figuras geométricas son semejantes entre sí, ¿sus lados homólogos son proporcionales? ______. Expliquen por qué. ______.
- Si dos figuras geométricas son semejantes entre sí, ¿sus ángulos homólogos son congruentes? ______. Justifiquen su respuesta. ______.
- En el caso de figuras congruentes, ¿sus lados homólogos son proporcionales? ______. ¿Sus ángulos correspondientes son congruentes? ______.

3. Criterios de congruencia y semejanza de triángulos

Contenido 1.3. Explicitación de los criterios de congruencia y semejanza de triángulos a partir de construcciones con información determinada.

Jaque al rey

La torre de vino de manzana

El jefe de mantenimiento de la Torre Westhafen (figura 1) en Fráncfort del Meno, Alemania, les pide a Moritz y Wilhelm cambiar algunos de los 3 556 paneles triangulares de vidrio de la fachada de la "torre de vino de manzana", llamada así por el gran parecido que tiene con un vaso de vino de manzana.

¿Cómo deben ser los nuevos paneles triangulares: semejantes o congruentes?

Moritz mide sólo los tres lados de un panel que va a cambiar. ¿Con esta información podrá reemplazarlo? ______. ¿Por qué? ______

______.

Wilhelm mide sólo los tres ángulos interiores de un panel que debe sustituir. ¿Con esta información podrá reemplazarlo? ______. Explica por qué. ______.

Escribe al menos dos grupos distintos de medidas a partir de las cuales sea posible construir paneles congruentes a los que se requieren. ______

______.

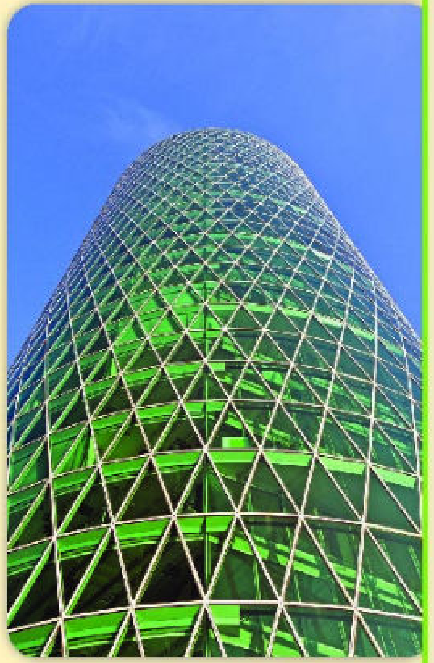


Figura 1

Apertura

▶ Criterios de congruencia de triángulos

1. Reúnete con uno o dos compañeros y analicen las situaciones que se plantean.

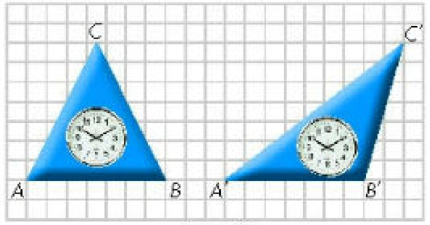


Figura 2

a) Dos relojeros deben fabricar, cada quien por su cuenta, un reloj triangular. Sólo se exige que al terminar los relojes tengan una cara congruente entre sí y, para ello, se da la medida de uno de sus lados. En la figura 2 se muestra una fotografía de los relojes construidos.

¿Qué lados miden lo mismo? ________ ¿Las caras triangulares ABC y $A'B'C'$ son congruentes entre sí? ____________________ ¿Por qué? ____________
____

Comenten con otros equipos si dos triángulos que tienen sólo uno de sus lados congruentes pueden ser congruentes entre sí. Lleguen a una conclusión y escríbanla. ________
____

Figura 3

b) Una persona desea saber si las dos velas de un velero son congruentes entre sí. Para este fin toma la medida de los lados $\overline{AB}$ y $\overline{DE}$ (es decir, las respectivas botavaras o perchas horizontales de las velas) y se da cuenta de que tienen la misma longitud. Luego mide los ángulos que los lados $\overline{AB}$ y $\overline{DE}$ forman con los otros lados de las velas, lo cual se indica en la figura 3.

¿Las velas triangulares son congruentes entre sí? ____________ ¿Por qué? ____
____
____

Lean el siguiente enunciado: "Para que dos triángulos sean congruentes entre sí basta con que el lado de un triángulo lo mida lo mismo que el lado homólogo del otro triángulo, y que los dos ángulos que se forman entre dicho lado y los otros lados tengan la misma medida en ambos triángulos".

Analicen el enunciado anterior y decidan si es falso o verdadero. Justifiquen su respuesta.
____

Glosario

triángulos congruentes: dos triángulos son congruentes si sus lados y sus ángulos homólogos miden lo mismo.

2. Identifica en la tabla 3.1 qué enunciados son verdaderos y cuáles falsos. Escribe una ✓ en la columna correspondiente.

Tabla 3.1. Características que deben tener dos triángulos para ser congruentes entre sí

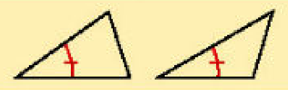
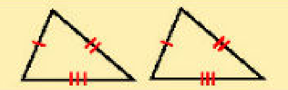
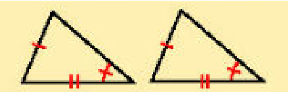
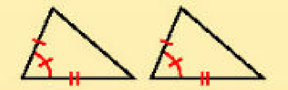
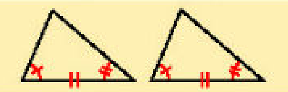
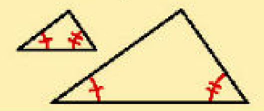
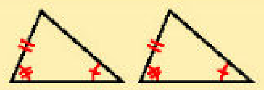
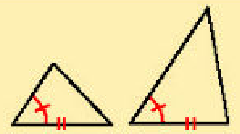
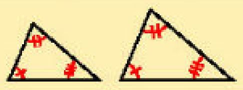
Enunciado	Diagrama	Verdadero	Falso
I. Si un ángulo es congruente con su homólogo, entonces los triángulos son congruentes entre sí.			
II. Si los tres lados son congruentes con sus homólogos, entonces los triángulos son congruentes entre sí.			
III. Si dos lados contiguos y un ángulo que no está comprendido entre estos lados homólogos son congruentes, entonces los triángulos son congruentes entre sí.			
IV. Si dos lados son congruentes con sus homólogos, entonces los triángulos son congruentes entre sí.			
V. Si dos lados contiguos y el ángulo formado por estos lados son congruentes con sus homólogos, entonces los triángulos son congruentes entre sí.			
VI. Si un lado es congruente con su homólogo y también son congruentes los ángulos de los extremos del lado homólogo, entonces los triángulos son congruentes entre sí.			

Tabla 3.1. Características que deben tener dos triángulos para ser congruentes entre sí (*continuación*)

Enunciado	Diagrama	Verdadero	Falso
VII. Si un par de ángulos son congruentes con sus homólogos, entonces los triángulos son congruentes entre sí.			
VIII. Si un lado es congruente con su homólogo y dos ángulos consecutivos también son congruentes, entonces los triángulos son congruentes entre sí.			
IX. Si un lado y un ángulo son congruentes con sus homólogos, entonces los triángulos son congruentes entre sí.			
X. Si los tres ángulos son congruentes con sus homólogos, entonces los triángulos son congruentes entre sí.			

En parejas, verifiquen que los enunciados que identificaron como verdaderos efectivamente lo sean. En sus cuadernos, traten de dibujar en cada caso dos triángulos distintos con los criterios mencionados. Por ejemplo, si señalaron como verdadero el enunciado II ("Si los tres lados son congruentes con sus homólogos, entonces los triángulos son congruentes entre sí"), dibujen dos triángulos diferentes en los que las medidas de sus lados sean 5 cm, 4 cm y 6 cm.

¿Pudieron dibujar triángulos diferentes? ________ ¿El enunciado es verdadero o falso? ____________ ¿Por qué? ____________________
¿Los triángulos dibujados cumplen con otro enunciado? ____________ ¿Con cuál?
____

¿Qué enunciados resultaron ser realmente verdaderos? ____________

En grupo y con la guía de su maestro, analicen los enunciados de la tabla 3.1 y lleguen a un acuerdo sobre cuáles son los criterios de congruencia de triángulos. En cada caso, justifiquen su respuesta.

3. Cuatro alumnos elaboraron diferentes papalotes de dos colores (figura 4). La condición que debían cumplir los alumnos para hacer los papalotes era ocupar la misma cantidad de papel en cada color.

a) ¿Qué forma tiene cada uno de los papalotes?
____

b) ¿En qué papalotes se cumplió con lo solicitado? Explica tu respuesta. ____________
____

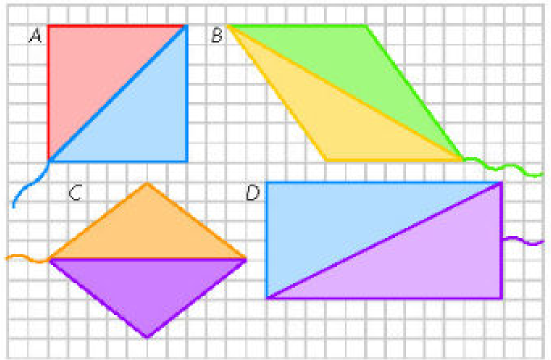


Figura 4

Reúnete con dos compañeros y comenten si en cada caso las dos regiones del papalote son congruentes entre sí. Justifiquen su respuesta.

Glosario

criterios de congruencia: se denominan criterios de congruencia de triángulos a las condiciones que garantizan que aquellos triángulos que las cumplen son siempre congruentes entre sí.

▶ Criterios de semejanza de triángulos

1. En parejas, realicen lo que se solicita.

a) En la lección 2 se estudió que, para que dos polígonos sean semejantes entre sí, deben cumplir con dos condiciones. Recuerden cuáles son y escríbanlas a continuación:

- ______________________________.
- ______________________________.

b) En las figuras 5, 6 y 7 se muestran pares de triángulos que no son semejantes entre sí. En cada pareja de triángulos, expliquen por qué.

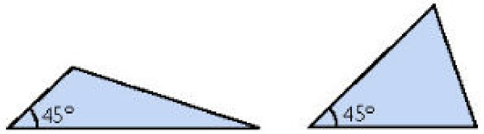


Figura 5

No son semejantes porque ______________________________

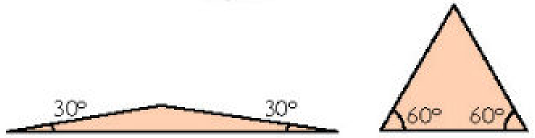


Figura 6

No son semejantes porque ______________________________

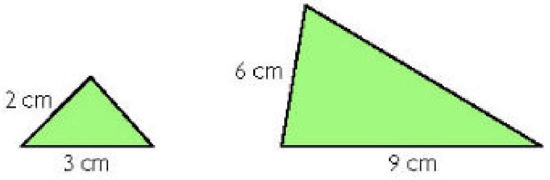


Figura 7

No son semejantes porque ______________________________

¿Los criterios para asegurar que dos triángulos son semejantes son los mismos criterios empleados para asegurar que dos polígonos cualesquiera son semejantes entre sí? ____________ ¿Cuáles son dichos criterios? ______________________________

2. Responde las preguntas que se formulan y realiza lo que se pide en los incisos.

a) Para los casos 1 y 2 mostrados en la figura 8, ¿cuáles son las semejanzas y cuáles las diferencias entre los triángulos *ABC* y *ADE*? ______________________________

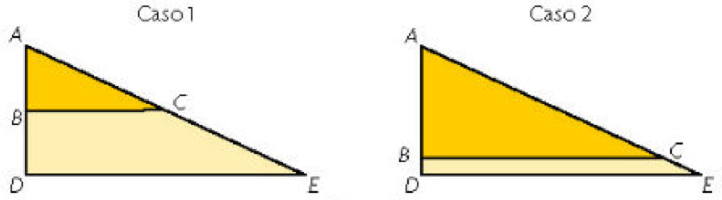


Figura 8

b) Con un juego de geometría toma las medidas de cada uno de los ángulos interiores de los triángulos de la figura 8.

¿Las medidas de los ángulos interiores de los triángulos *ABC* —en los casos 1 y 2— son iguales o distintas a las medidas de los ángulos interiores de los triángulos *ADE*? ____________.

¿A partir de las mediciones de los ángulos interiores de dos triángulos diferentes se puede concluir que son semejantes? ____________. Explica tu respuesta. ______________________________.

Si la respuesta es afirmativa, ¿es necesario medir todos los ángulos? ____________. ¿Por qué? ______________________________

Con base en tus respuestas, escribe un posible criterio de semejanza para triángulos. ______________________________

c) En cada caso, toma las medidas de los lados en los triángulos para completar las tablas 3.2 y 3.3 y considera los cocientes como se indica.

Caso 1

Tabla 3.2. Comparación de las medidas de los triángulos *ABC* y *ADE*

Lados	Medidas	Lados	Medidas	Lados	Medidas
$\overline{AE}$		$\overline{AD}$		$\overline{DE}$	
$\overline{AC}$		$\overline{AB}$		$\overline{BC}$	
$\frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} =$		$\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} =$		$\frac{\overline{DE}}{\overline{BC}} =$	

Caso 2

Tabla 3.3. Comparación de las medidas de los triángulos *ABC* y *ADE*

Lados	Medidas	Lados	Medidas	Lados	Medidas
$\overline{AE}$		$\overline{AD}$		$\overline{DE}$	
$\overline{AC}$		$\overline{AB}$		$\overline{BC}$	
$\frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} =$		$\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} =$		$\frac{\overline{DE}}{\overline{BC}} =$	

i) En los dos casos anteriores, ¿los cocientes de las medidas de los lados fueron distintos? ____________. Explica por qué. ______________________________.

ii) Si los cocientes fueron iguales, ¿cuántas veces es más "grande" un triángulo que el otro? Justifica tu respuesta. ______________________________.

iii) ¿Es posible afirmar que si los cocientes de las medidas de los lados homólogos de dos triángulos son iguales, entonces los triángulos son semejantes? ¿Por qué? ______________________________

Reúnete con un compañero y, con base en las respuestas de esta actividad, escriban en el recuadro un posible criterio de semejanza entre triángulos.

Criterio de semejanza:

d) Respecto a los triángulos de la figura 8, ¿el lado $\overline{BC}$ es paralelo al lado $\overline{DE}$? ____________. Tracen otro segmento que sea paralelo al lado $\overline{DE}$ y que corte al triángulo en los puntos *F* y *G*. Tracen el triángulo *AFG*.

¿El triángulo *AFG* es semejante a los triángulos *ABC* y *ADE*? ____________. Expliquen su respuesta. ______________________________

¿Es posible justificar la semejanza de los triángulos *ABC* y *ADE* de la misma manera en que se hace en los incisos *b* o *c*? ________. Expliquen su respuesta. ____________________

En grupo y con la ayuda de su maestro, comenten los posibles criterios de semejanza para los triángulos establecidos en los puntos anteriores. Analicen si son los únicos criterios de semejanza.

3. En los casos 1 y 2 de la figura 9, argumenta por qué los triángulos *ABC* y *ADE* son semejantes entre sí.

Reúnete con dos compañeros y comenten qué argumentos dieron para afirmar que los triángulos *ABC* y *ADE* son semejantes entre sí. Verifiquen que los argumentos sean válidos. ¿Emplearon criterios de semejanza? ________ ¿Cuáles? ____________________

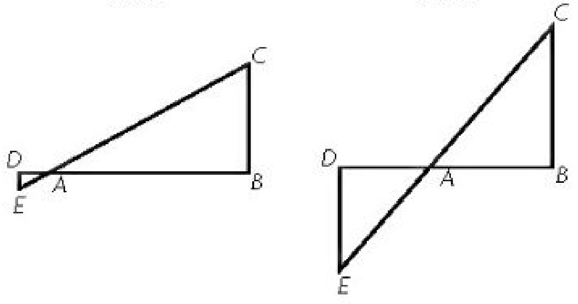


Figura 9

El mundo en un tablero

Para desarrollar tus habilidades en los criterios de congruencia y semejanza de triángulos, visita la página http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/homotecia_y_semejanza_aplicaciones_naji/semejanza6.html (Consulta: 22 de junio de 2013.)

En equipos, realicen una investigación en internet respecto a otras posibles aplicaciones de la semejanza o la congruencia en las ciencias y el arte.

Analicemos la partida

La torre de vino de manzana

a) En parejas, comenten qué entienden por criterios de congruencia y por criterios de semejanza.

b) Escriban en su cuaderno cuáles son los criterios de semejanza y de congruencia de los triángulos que se analizaron en esta lección.

c) Revisen los dos grupos distintos de medidas con las que Moritz y Wilhelm consideran que es posible construir paneles congruentes. Dibujen algunos ejemplos para mostrar que sus afirmaciones son correctas.

¿Con la información que tienen estos trabajadores es posible construir un panel congruente o uno semejante al que deben reemplazar? ________. Justifiquen su respuesta. ____________________

Validen sus respuestas usando los distintos criterios de congruencia para triángulos.

4. Análisis de diferentes representaciones correspondientes a una misma situación

Contenido 1.4. Análisis de representaciones (gráficas, tabulares y algebraicas) que corresponden a una misma situación. Identificación de las que corresponden a una relación de proporcionalidad.

Jaque al rey

Todo marcha sobre ruedas

En la competencia anual de *monster trucks*, celebrada en Tijuana, uno de los pilotos necesita saber la distancia que avanza su camioneta (figura 1) por cada vuelta que den las llantas, ya que con esta información podrá definir mejor la estrategia de la carrera en una pista plagada de baches y obstáculos.

El piloto consulta en un manual la gráfica 4.1, en la que se muestra la longitud de la circunferencia de la llanta respecto al tamaño de su diámetro.

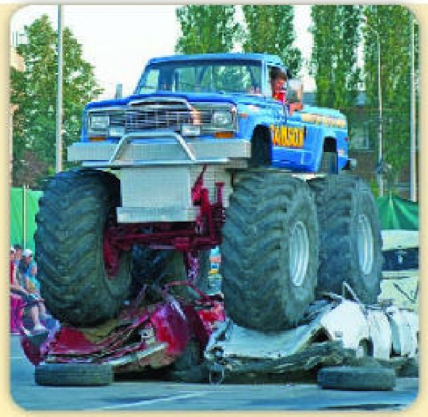


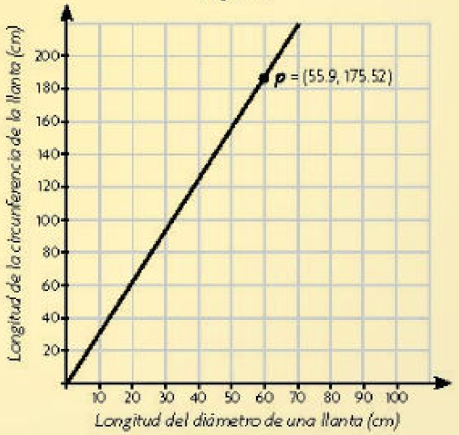
Figura 1

Las coordenadas del punto *p* son (55.9, 175.52). ¿Qué representan los valores de estas coordenadas? ____________ ¿Cuál es el valor de la ordenada del punto cuya abscisa es 50.8? ____________

¿Qué distancia avanzará la camioneta *monster* en cada vuelta de llanta si su diámetro mide 55.9 cm? ____________

¿Cuál es la expresión algebraica que corresponde a la gráfica 4.1? ____________

¿Se trata de una gráfica de proporcionalidad directa? ________. ¿Por qué? ____________________



Gráfica 4.1. Longitud de la circunferencia de la llanta de acuerdo con su diámetro

Apertura

Diversas representaciones

1. Reúnete con dos compañeros, analicen las situaciones y respondan las preguntas que se plantean.

a) De las tablas 4.1, 4.2, 4.3 y 4.4, determinen cuál o cuáles de ellas corresponden a una variación de proporcionalidad directa y escriban una ✓ en el círculo.

i) Altura que alcanza el líquido en un recipiente en función del tiempo de llenado.

Tabla 4.1. Altura del líquido en función del tiempo de llenado

x (tiempo)	1	2	3	4	5
y (altura)	5	6	7	8	9

ii) Perímetro de un cuadrado en función de la medida de su lado.

Tabla 4.2. Perímetro del cuadrado en función de la medida de su lado

x (medida del lado)	1	2	3	4	5
y (perímetro)	4	8	12	16	20

iii) Número de obreros que se requieren para completar un trabajo en cierto tiempo.

Tabla 4.3. Número de obreros para realizar un trabajo en cierto tiempo

x (núm. de obreros)	1	2	3	4	5
y (núm. de días)	5	4	3	2	1

iv) Área de un cuadrado en función de la medida de su lado.

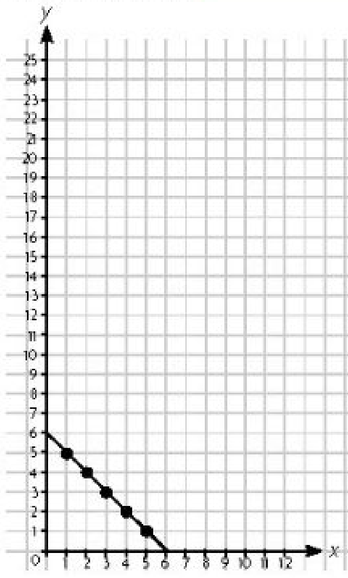
Tabla 4.4. Área de un cuadrado en función de la medida de su lado

x (medida del lado)	1	2	3	4	5
y (área del cuadrado)	1	4	9	16	25

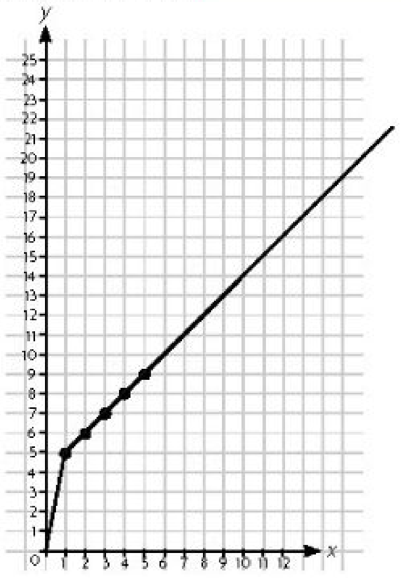
b) De los conjuntos de datos presentados en las tablas 4.1-4.4, ¿qué característica permite afirmar que mantienen una relación de proporcionalidad directa? ______

c) Relacionen las tablas del inciso *a* con las gráficas correspondientes (gráficas 4.1, 4.2, 4.3 y 4.4). Escriban los títulos que deben ir en los ejes coordenados.

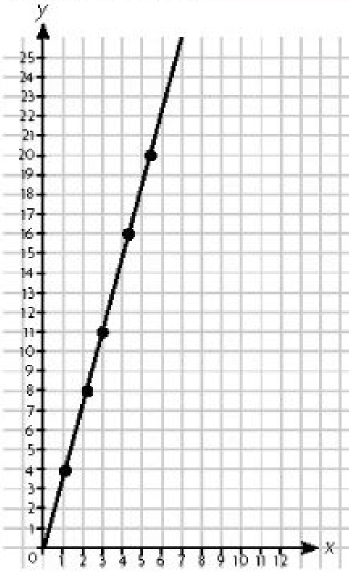
Gráfica 4.1. Tabla ______



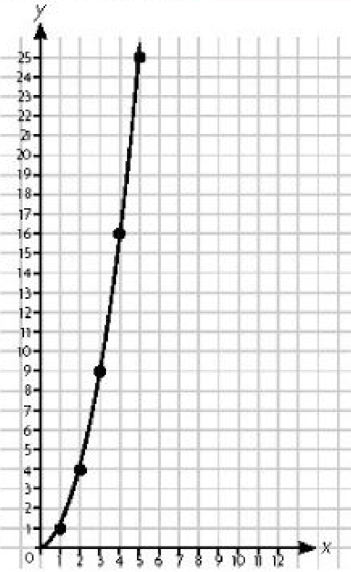
Gráfica 4.2. Tabla ______



Gráfica 4.3. Tabla ______



Gráfica 4.4. Tabla ______



d) ¿Qué expresión algebraica corresponde a la gráfica o las gráficas (y las tablas correspondientes) en que identificaron una relación de proporcionalidad directa? ______

Comparen sus respuestas con las de otros equipos y redacten una conclusión sobre las características que tiene una gráfica de proporcionalidad directa. ______

Contrasten las respuestas que dieron en los incisos anteriores con la información del recuadro "Representación de una situación directamente proporcional". A partir de la información de este recuadro, cambien o hagan las rectificaciones que consideren necesarias.

Representación de una situación directamente proporcional

Una misma situación de proporcionalidad puede tener distintas representaciones: gráfica, tabular o algebraica. Si las magnitudes involucradas aumentan o disminuyen al mismo tiempo de forma proporcional, entonces existe una **relación de proporcionalidad directa**.

Las funciones de proporcionalidad directa se llaman también **funciones lineales**. La gráfica de una relación de proporcionalidad directa se representa mediante una recta que pasa por el origen del plano cartesiano, es decir, por el punto (0, 0). La representación algebraica de las relaciones de proporcionalidad tiene la forma $y = kx$. En la figura 2, se muestra un ejemplo de esto.

$y = 2x$	
x	y
1	2
2	4
3	6
4	8

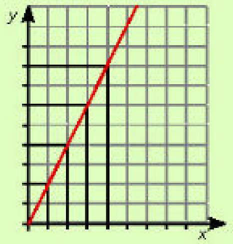


Figura 2

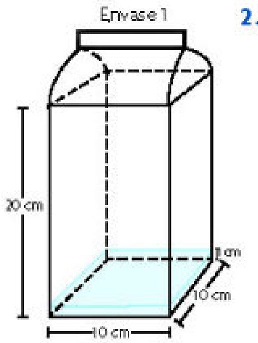


Figura 3

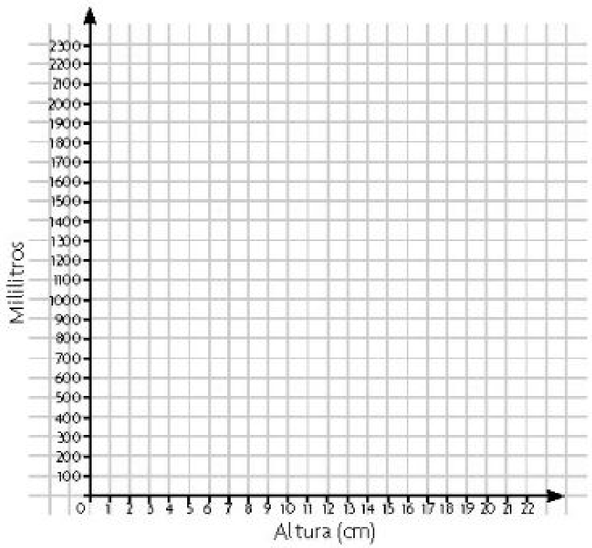
2. En parejas, analicen qué cantidad de líquido hay en el envase 1 (figura 3) conforme el nivel del líquido aumenta gradualmente.
Será útil que consideren la equivalencia entre mililitros (ml) y centímetros cúbicos (cm³). Si el líquido marca hasta 1 cm de altura, significa entonces que hay 100 ml.

a) Registren en la tabla 4.5 la cantidad de líquido que contiene el envase 1 de acuerdo con la altura que alcanza el líquido en dicho envase.

Tabla 4.5. Líquido en el envase 1

Altura del líquido en el envase 1 (cm)	Mililitros de líquido
1	
2	
2.5	
5	
10	
17.5	

b) Con los datos de la tabla 4.5, tracen la gráfica 4.6.



Gráfica 4.6. Cantidad de líquido en el envase 1 de acuerdo con la altura del nivel del líquido

c) ¿Qué cantidad de líquido habría en el envase 1 si el nivel alcanzara una altura de 8 cm? ________. ¿Y si alcanzara una altura de 18 cm? ________. ¿Y una de 20 cm? ________.
Escriban una expresión algebraica para conocer la cantidad de mililitros que contiene el envase 1 en función de la altura del líquido. ________________

Si se quiere apreciar cómo se llena el envase 1 conforme varía la altura del líquido, ¿qué representación consideran más útil: la gráfica, la tabular o la algebraica? ________
¿Por qué? ________________
¿Qué representación emplearían para determinar la cantidad de líquido si se tiene una altura de 7.35 cm? ________. Justifiquen por qué utilizarían esa representación.
____

Glosario

mililitro: unidad de capacidad que equivale a la milésima parte de un litro; se representa mediante el símbolo **ml**. También equivale a un centímetro cúbico.

1 ml = 1 cm³

3. La expresión $L = 60\ h$, donde h es la altura del líquido, permite conocer la cantidad de mililitros que contiene uno de los envases de la figura 4 en función de la altura que alcanza el líquido en el recipiente.

a) ¿De qué envase se trata? ________. ¿Por qué? ________
____

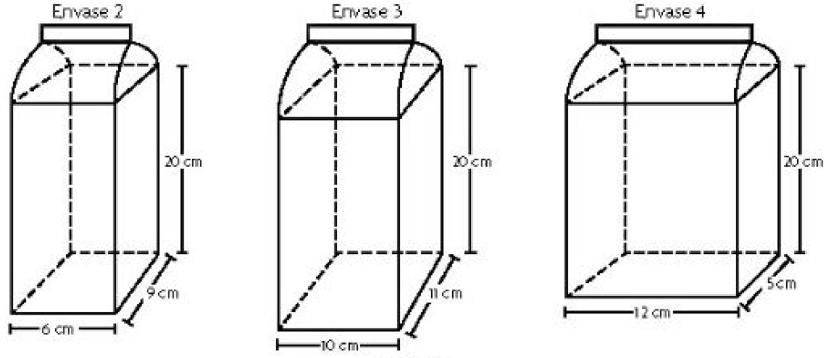


Figura 4

b) Completa la tabla 4.6 con la cantidad de líquido que debe haber en cada uno de los envases de acuerdo con las diferentes alturas durante el llenado.

Tabla 4.6. Líquido en los envases 2, 3 y 4

Altura que alcanza el líquido (cm)	ml en el envase 2	ml en el envase 3	ml en el envase 4
1			
2			
5			
11			
14.5			
16.5			
20			

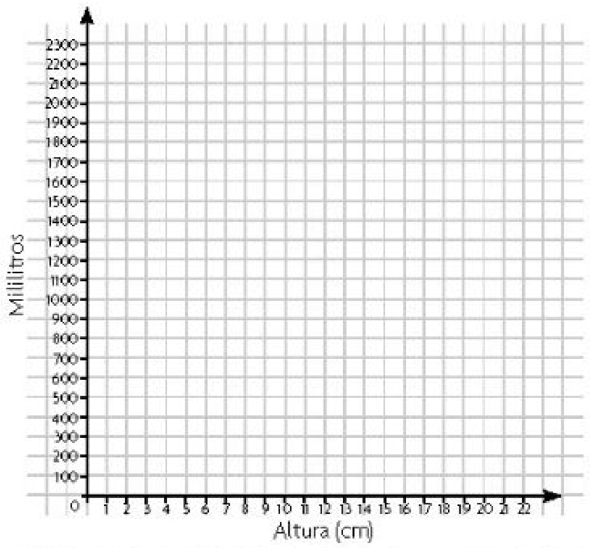
c) En cada envase escribe una expresión algebraica para conocer la cantidad de líquido (expresada en ml) en función de la altura que alcanza en el recipiente.

Envase 2 ________________

Envase 3 ________________

Envase 4 ________________

d) Represента en la gráfica 4.7 los datos de la tabla 4.6. Usa un color distinto para cada envase.



Gráfica 4.7. Cantidad de líquido en los envases 2, 3 y 4

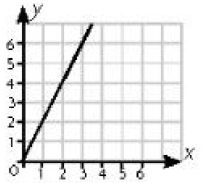
¿Las gráficas de los recipientes resultaron ser lineales? ________. Explica por qué. ________________
____

Figura 5

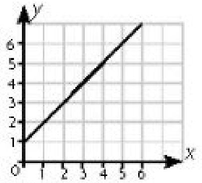
Si la forma de los envases fuera distinta, ¿la cantidad de líquido en el recipiente variaría de manera proporcional respecto a la altura del líquido en el recipiente? ______. Explica tu respuesta en el cuaderno dando un par de ejemplos.

"En los recipientes de la figura 5, ¿consideras que la situación de llenado, respecto al tiempo, es de proporcionalidad directa? ______. Expica por qué. ______ ______."

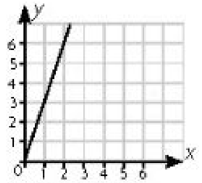
4. Para las gráficas 4.8-4.13, elige la expresión algebraica que les corresponde de las opciones mostradas en los recuadros verdes.



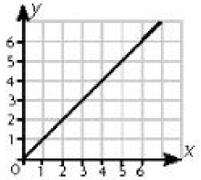
Gráfica 4.8.
Expresión algebraica: ______



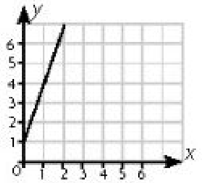
Gráfica 4.9.
Expresión algebraica: ______



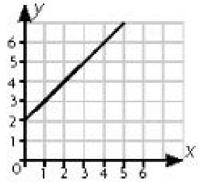
Gráfica 4.10.
Expresión algebraica: ______



Gráfica 4.11.
Expresión algebraica: ______



Gráfica 4.13.
Expresión algebraica: ______



Gráfica 4.12.
Expresión algebraica: ______

$y = x$ | $y = x + 1$ | $y = 2x$ | $y = x + 2$ | $y = 3x$ | $y = 3x + 1$

b) A fin de comprobar que las expresiones algebraicas del inciso *a* sean las correspondientes a cada gráfica, efectúa las tabulaciones y compara los datos con la gráfica que elegiste.

Tabla 4.7

$y = x$	
x	y
1	
2	
3	
4	
5	

Tabla 4.8

$y = 2x$	
x	y
1	
2	
3	
4	
5	

Tabla 4.9

$y = 3x$	
x	y
1	
2	
3	
4	
5	

Tabla 4.10

$y = x + 1$	
x	y
1	
2	
3	
4	
5	

Tabla 4.11

$y = x + 2$	
x	y
1	
2	
3	
4	
5	

Tabla 4.12

$y = 3x + 1$	
x	y
1	
2	
3	
4	
5	

c) En la tabla 4.13 el cociente $\frac{y}{x}$ es una constante k, donde $k = 1$.

Verifica que en las tablas 4.7-4.12 el cociente $\frac{y}{x}$ sea una constante. ¿En qué tablas el cociente $\frac{y}{x}$ es una constante? ______. ¿En qué casos existe proporcionalidad? Justifica tu respuesta. ______ ______

x	y	
1	1	$\rightarrow \frac{1}{1} = 1$
2	2	$\rightarrow \frac{2}{2} = 1$
3	3	$\rightarrow \frac{3}{3} = 1$
4	4	$\rightarrow \frac{4}{4} = 1$
5	5	$\rightarrow \frac{5}{5} = 1$

Tabla 4.13. Cocientes de $\frac{y}{x}$

Compara tus resultados con los de otros compañeros. Pide a tu maestro que organice una discusión grupal en la que comenten qué hizo cada quien para encontrar las relaciones correctas entre las gráficas y las expresiones algebraicas.

El mundo en un tablero

Consulta la siguiente página y desarrolla tus habilidades para hacer conjeturas respecto al llenado de recipientes y la proporcionalidad directa.
https://www.geogebra.org/m/dxf6yUp9 (Consulta: 21 de enero de 2017.)

Reúnete con dos compañeros y, apoyados en la aplicación de GeoGebra, analicen lo siguiente: si se elabora una gráfica para representar la altura que va alcanzando el líquido en cada uno los recipientes siguientes, ¿la gráfica será igual o diferente? ______. ¿Por qué? ______.

¿Qué tendrían que hacer para escribir una expresión algebraica con la que pudieran conocer la cantidad de líquido, expresada en ml, que habrá en los envases 5, 6 y 7 (figura 6) en función de la altura del líquido?

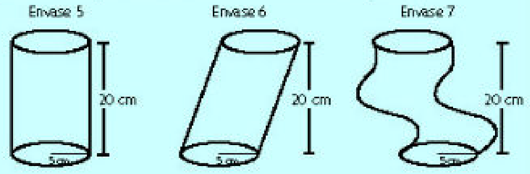


Figura 6

Analicemos la partida

Todo marcha sobre ruedas

a) En parejas, recuerden cómo se calcula la circunferencia de un círculo.

b) Den valores del diámetro que pueden tener distintas llantas y completen la tabla 4.14.

Tabla 4.14. Valores del diámetro y circunferencia para diferentes tamaños de llanta

Diámetro de una llanta (cm)									
Circunferencia de una llanta (cm)									

c) ¿Qué procedimiento se puede seguir para calcular la circunferencia de una llanta si se conoce su diámetro? ______. ¿Cómo se relaciona este cálculo con el avance de la camioneta? ______

d) ¿Es posible representar de distintas maneras la relación que hay entre el diámetro de una llanta y su circunferencia? ______. Si la respuesta es afirmativa, ¿cuáles son estas distintas representaciones? ______

¿En qué casos usarías cada una de ellas? ______.

e) ¿Por qué el piloto de la *monster truck* consultó un manual que incluía una gráfica (gráfica 4.1) para conocer la longitud de la circunferencia de la llanta respecto a la medida del diámetro? ______.

Para cualquier situación, ¿qué tipo de pregunta es más fácil responder a partir de la representación gráfica? ______
¿Qué tipo de pregunta es más fácil contestar a partir de la representación tabular? ______
¿Qué tipo de pregunta es más fácil responder si se cuenta con la representación algebraica? ______

5. Representación de relaciones de variación cuadrática en diferentes disciplinas

Contenido 1.5. Representación tabular y algebraica de relaciones de variación cuadrática, identificadas en diferentes situaciones y fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas.

Jaque al rey

Señalamientos claros y oportunos

La distancia de frenado se define como el espacio recorrido por un auto desde que el conductor observa un obstáculo o una señal de alto, acciona el freno y el vehículo se detiene por completo. Esta distancia depende básicamente de tres factores: *i*) el tiempo de reacción del conductor, *ii*) la velocidad del automóvil y *iii*) la capacidad de desaceleración del sistema de frenos.

En cierto punto de una autopista se determinó instalar un puesto de control para realizar una revisión rutinaria de seguridad. Se desea saber a qué distancia del puesto deben colocarse los señalamientos de frenado (figura 1).

Figura 1

En la tabla 5.1 se muestran los datos de un estudio en el que se registraron las distancias de frenado a diferentes velocidades.

Tabla 5.1. Distancias de frenado a distintas velocidades

Velocidad $\left(\frac{km}{h}\right)$	80	90	100	110
Distancia de frenado (m)	51	64	79	96

Encuentra un procedimiento para calcular la distancia de frenado de un auto que va a una velocidad de 180 $\frac{km}{h}$.

Escribe una expresión algebraica con la que sea posible calcular la distancia de frenado de un auto que se desplaza a cualquier velocidad. ______. Justifica tu respuesta. ______

¿Será útil para los encargados de instalar el puesto de control tener dicha fórmula? ______

¿Por qué? ______

Apertura

▶ Variación cuadrática y caída libre

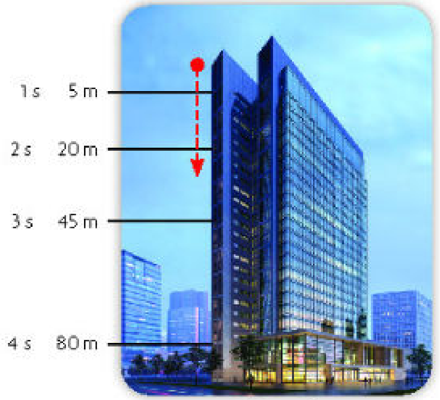


Figura 2

1. Reúnete con un compañero y analicen la figura 2 en la que se muestra la distancia total recorrida por un objeto que cae libremente desde una posición en reposo.

a) Analicen los datos que se presentan en la figura 2. ¿Qué representan estos datos? ______
Comenten si la situación planteada corresponde a una de variación directamente proporcional. Escriban los argumentos que apoyan su respuesta. ______

b) Encuentren un procedimiento con el que calculen la distancia recorrida por el objeto a los 5 y 6 segundos. Justifiquen su respuesta. ______.

c) Con los datos de la figura 2 y los obtenidos en el inciso *b*, completen la tabla 5.2.

Tabla 5.2. Distancia recorrida por un objeto en caída libre en diferentes tiempos

Tiempo (s)	1	2	3	4	5	6
Distancia recorrida (m)						

d) Calculen el cuadrado del tiempo y encuentren un número que multiplicado por dicho cuadrado dé la distancia recorrida. ______

e) ¿Qué relación hay entre el tiempo y la distancia recorrida? ______

f) ¿Con cuál de las siguientes expresiones algebraicas es posible encontrar la distancia recorrida por el objeto en cada segundo durante la caída libre? Justifiquen su elección. ______

i) $y = (x + x + x + x + x)(2)$
ii) $y = (x + 5) + (x + 20) + (x + 55) + (x + 80)$
iii) $y = 5x^2$
iv) $y = x^2 + 5$

g) En las expresiones del inciso *f*, ¿qué representa *y*? ______.
¿Y qué representa *x*? ______.

h) Escriban en su cuaderno qué procedimiento siguieron para encontrar la ecuación correcta.

i) Para verificar que la respuesta del inciso *f* sea correcta, sustituyan en cada una de las expresiones algebraicas el valor de *x* por 1, 2, 3 y así sucesivamente. ¿En qué casos se obtienen los mismos valores de la tabla 5.2? ______. ¿Eligieron la respuesta correcta? ______

j) En un libro de física se lee este resumen sobre caída libre de un cuerpo.

> En un cuerpo u objeto en caída libre, la relación entre la distancia recorrida y el tiempo empleado en recorrerla está dada por la ecuación $d = \frac{1}{2}gt^2$, donde d es la distancia recorrida y g es la aceleración que experimenta el objeto en caída libre debido a la fuerza de gravedad, cuyo valor es una constante aproximadamente igual a 10 $\frac{m}{s^2}$.

¿Qué relación existe entre la fórmula que presenta el libro de física y la expresión algebraica que representa la relación de los datos de la tabla 5.2? ____________________

La distancia que recorre un objeto en caída libre se puede representar de distintas maneras. ¿Cuáles son estas distintas maneras? ____________________

¿Cuál de estas formas usarías para encontrar la distancia que recorre un objeto en caída libre después de 15 s? Argumenta tu respuesta. ____________________

2. Para poder afirmar que ciertos datos corresponden a una variación cuadrática a partir de la expresión algebraica o la función que modela la relación entre ellos, analiza los siguientes recuadros:

Expresiones algebraicas que representan una variación cuadrática:	Expresiones algebraicas que no representan una variación cuadrática:
$y = x^2$	$y = 4x$
$y = 3x^2 - 5$	$y = x + 4$
$y = 5x^2 + 6x - 2$	$y = x^4$

a) ¿Qué características tienen las expresiones algebraicas que modelan una variación cuadrática? ____________________

b) Compara tu respuesta con la información del recuadro "Variación cuadrática de una variable" y analiza si lo que escribiste es correcto o si debes modificarlo para mejorar tu respuesta.

El mundo en un tablero

En esta página podrás profundizar en el estudio de la caída libre.
http://www.objetos.unam.mx/fisica/caidaLibre/index.html (Consulta: 21 de enero de 2017.)

Comenta con otros compañeros por qué se utilizan fórmulas distintas en las actividades de este *link*. Si tienen dudas, pidan orientación de su maestro.

Variación cuadrática de una variable

Se dice que una variable y varía de forma cuadrática respecto a otra variable x cuando la relación entre ambas variables es un polinomio de grado 2, es decir, de la forma:

$$y = ax^2 + bx + c$$

en el que el valor de a es distinto de cero.

¿Por qué se pide que a sea distinta de cero? ¿Qué pasaría si a fuera cero? ____________________

En parejas, sugieran algunos ejemplos de expresiones algebraicas que representen situaciones de variación cuadrática. Escriban en su cuaderno cuáles son las características de los fenómenos que se modelan con expresiones algebraicas cuadráticas o de segundo orden.

3. Formen equipos de tres alumnos y comenten si la caída libre —analizada en la actividad 1— es una situación de variación cuadrática. Expongan con claridad las ideas matemáticas que apoyan su respuesta; si lo consideran necesario, utilicen diferentes tipos de representaciones para apoyarse. ____________________

▶ Variación cuadrática y modelo atómico de Bohr

1. En el modelo atómico de Niels Bohr (físico danés, 1885-1962), los electrones giran rápidamente alrededor del núcleo. Este modelo postula que los electrones sólo pueden girar en determinadas órbitas o niveles de energía; existen siete niveles y cada uno puede contener sólo cierta cantidad de electrones (figura 3).

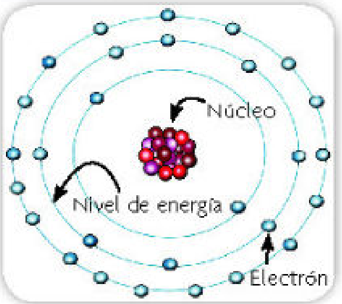


Figura 3

En la tabla 5.3, se presenta el mayor número de electrones que, teóricamente, puede haber en cada nivel de energía.

Tabla 5.3. Número máximo de electrones en cada nivel de energía de un átomo

Nivel de energía	1	2	3	4	5	6	7
Núm. máximo de electrones	2	8	18	32	50	72	98

a) Formen equipos de tres o cuatro alumnos y analicen cómo podrían encontrar una expresión algebraica que modele el número máximo de electrones en cada uno de los siete niveles de energía.

b) Para hallar la expresión algebraica que modela la cantidad máxima de electrones en los distintos niveles de energía, se propone el siguiente método.

Analicen la tabla 5.4 y comenten en qué consiste la primera parte de este método.

Tabla 5.4. Primera diferencia de la cantidad máxima de electrones entre los niveles de energía

Núm. máximo de electrones	2	**8**	18	**32**	50	**72**	98
Primera diferencia	6	10	14	18	22	26	

En la tabla 5.5 se muestra cómo se obtienen las cantidades de la "Primera diferencia".

Tabla 5.5. Primera diferencia de la cantidad máxima de electrones entre los niveles de energía

Primera diferencia	6 = **8** − 2	10 = 18 − **8**	14 = **32** − 18	18 = 50 − **32**	22 = **72** − 50	26 = 98 − **72**

¿Cómo describirían con palabras la manera en que se elaboró la tabla 5.5? ____________________

c) Continúen calculando las diferencias hasta que se vuelvan una constante, como se muestra en la tabla 5.6.

Tabla 5.6. Segunda diferencia de la cantidad máxima de electrones entre los niveles de energía

Nivel de energía	1	2	3	4	5	6	7
Núm. máximo de electrones	2	**8**	18	**32**	50	**72**	98
Primera diferencia	6	10	14	18	22	26	
Segunda diferencia	4	4	4	4	4		

Analicen cómo se obtiene el número 4 del renglón "Segunda diferencia" de la tabla 5.6. Lleguen a una conclusión y escríbanla. ______________________________

____

Si la "Segunda diferencia" de los términos de una sucesión es constante, entonces dicha sucesión puede modelarse con una expresión de segundo grado de la forma:

$$y = ax^2 + bx + c$$

A partir de esta relación de segundo grado se expresarán de manera general la primera y la segunda diferencias.

d) Analicen la tabla 5.7 poniendo atención en la forma en que se va llenando cada celda.

Tabla 5.7. Representación general de la primera y segunda diferencias

Nivel de energía x	1	2	3	4	5
Sustituir cada valor de x en $ax^2 + bx + c$	$a(1)^2 + b(1) + c$ $a + b + c$	$a(2)^2 + b(2) + c$ $4a + 2b + c$	$a(3)^2 + b(3) + c$ $9a + 3b + c$	$a(4)^2 + b(4) + c$ $16a + 4b + c$	$a(5)^2 + b(5) + c$ $25a + 5b + c$
Primera diferencia	$3a + b$	$5a + b$	$7a + b$	$9a + b$	
Segunda diferencia		$2a$	$2a$	$2a$	

Deduzcan cómo se obtienen las diferencias de la tabla 5.7; lleguen a una conclusión y escríbanla. ______________________________

____

e) Al combinar las expresiones algebraicas de la tabla 5.7 con los resultados de las diferencias de la tabla 5.6 (para el nivel de energía 1), se obtienen las ecuaciones de la tabla 5.8:

Tabla 5.8. Ecuaciones derivadas a partir de las expresiones algebraicas de la tabla 5.7 y los resultados de la tabla 5.6 (nivel de energía 1)

$a + b + c = 2$
$3a + b = 6$
$2a = 4$

i) Expliquen cómo se obtuvieron las ecuaciones de la tabla 5.8 a partir de las tablas 5.6 y 5.7. ______________________________

ii) Determinen el valor de a. ______________________________

iii) Sustituyan el valor de a en $3a + b = 6$. ¿Cuánto vale b? ______________________________

iv) Sustituyan el valor de a y b en $a + b + c = 2$. ¿Cuánto vale c? ______________________________

f) Por último, sustituyan los valores de a, b y c en la expresión general $y = ax^2 + bx + c$, y obtengan la expresión a partir de la cual se puede calcular el número máximo de electrones por nivel de energía. ______________________________

g) Si en un átomo existiera el nivel 12 de energía, ¿cuál sería el número máximo de electrones que podría tener en ese nivel? ______________________________

El método utilizado para resolver esta actividad se conoce como *método de diferencias finitas*.

En equipos, escriban una secuencia de instrucciones en la que se aplique el método de las diferencias finitas a otra situación de variación cuadrática. ______________________________

____

Empleen la secuencia de instrucciones que escribieron para ver si obtienen la misma expresión de los incisos *e* y *f* de la actividad 1, que permite calcular la distancia que recorre un objeto en caída libre respecto al tiempo.

4. Cuando se utiliza un proyecto de imágenes el área de la pantalla varía según la distancia que existe entre el proyector y la pantalla, como se aprecia en la figura 4.

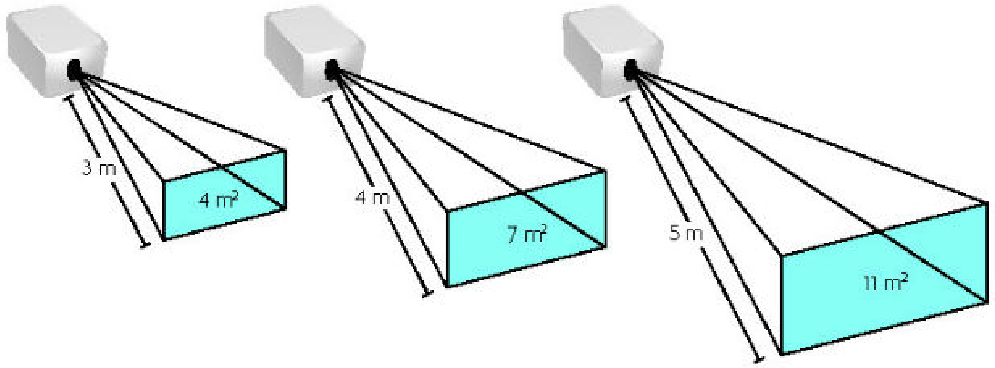


Figura 4

a) Con base en los datos de la figura 4, ¿cómo completarías la tabla 5.9 con el área de las pantallas proyectadas?

Tabla 5.9. Área de las pantallas a diferentes distancias entre el proyector y la pantalla

Distancia entre el proyector y la pantalla (m)	3	4	5
Área de la pantalla proyectada (m^2)			

b) Encuentra la expresión algebraica que muestra la relación entre las distancias y las áreas. ______________________________

Usa la expresión algebraica del inciso *b* para determinar el área de la pantalla cuando la distancia entre el proyector y la pantalla es de 1 m y 2 m. ______________________________

c) Completa la tabla 5.10 encontrando las áreas de la pantalla a las distancias indicadas.

Tabla 5.10. Área de las pantallas a diferentes distancias entre el proyector y la pantalla

Distancia entre el proyector y la pantalla (m)	0.5	1	2	2.5	3.5	4.5
Área de la pantalla proyectada (m^2)						

En parejas, comenten cómo pueden validar los resultados que obtuvieron. Comparen sus respuestas con las de otras parejas. Si hay discrepancias, soliciten la guía de su maestro para llegar a una conclusión.

Analicemos la partida

Señalamientos claros y oportunos

a) Analicen y completen la tabla 5.11. Las diferencias corresponden a las distancias de frenado (en metros) según la velocidad a la que se desplaza un automóvil.

Tabla 5.11. Velocidades y distancias de frenado de un automóvil.

Velocidad ($\frac{km}{h}$)	80	90	100	110
Distancia de frenado (m)	51	64	79	96
Primera diferencia				
Segunda diferencia				

¿Se obtiene una constante en la segunda diferencia? ________ ¿Cuál? ________

b) Si la segunda diferencia es constante, ¿qué significa respecto a la expresión algebraica que modela la distancia de frenado en función de la velocidad? ________

c) En parejas, analicen cómo se puede encontrar una expresión que modele la relación entre estas cantidades. ________

d) ¿Cuál es la expresión algebraica que modela la distancia de frenado en función de la velocidad? ________ ¿Esta expresión cumple las características de las expresiones algebraicas que modelan una variación cuadrática? ________ Expliquen por qué.
____

e) Si un auto viaja a una velocidad de 197.5 $\frac{km}{h}$, ¿qué distancia necesitará para frenar? ________

Elisa afirma que la expresión que modela el problema de la distancia de frenado de un automóvil en función de la velocidad es:

$$y = x^2 + 10x + 40$$

Mientras que Ángel señala que la expresión correcta es:

$$y = 0.01x^2 - 0.4x + 19$$

Reúnete con un compañero y analicen qué hicieron Elisa y Ángel para llegar a la respuesta que consideran correcta.

¿Cuál de las dos es la correcta? ________. Justifiquen su respuesta.
____

Si se da una velocidad cualquiera (por ejemplo, que un auto va a 195 $\frac{km}{h}$), ¿con cuál de las dos expresiones se resuelve el problema? ________. ¿Por qué la otra expresión algebraica no resuelve el problema? ________

6. Eventos complementarios y eventos mutuamente excluyentes e independientes

Contenido 1.6. Conocimiento de la escala de la probabilidad. Análisis de las características de eventos complementarios y eventos mutuamente excluyentes e independientes.

Jaque al rey

Cuando algo nos late, ¿qué dice la probabilidad?

Carmen y Susana están jugando volados. En el primer volado, cae águila y gana Carmen. Después Susana pide águila y gana.
En el siguiente turno Carmen va a pedir de nuevo águila, pero en eso llega Miguel y le aconseja que pida sol, pues está segurísimo de que se necesita tener mucha suerte para que caigan tres águilas seguidas.

¿Es correcto el argumento de Miguel? ________. Justifica tu respuesta. ________
¿Realmente le conviene a Carmen pedir sol en el tercer volado? ________. Explica por qué. ________

En una sucesión de volados, ¿la probabilidad de que caiga sol después de haber salido dos veces seguidas es mayor o menor que 50%? ________. ¿Cómo estimaste dicha probabilidad? ________

Apertura

▶ Escala de la probabilidad

1. Reúnete con dos compañeros para analizar las situaciones y responder las preguntas que se plantean.

a) ¿Es posible que uno de estos dos eventos: "Salir el número 2" al tirar un dado o "Caer águila" al lanzar una moneda, tenga mayor posibilidad de suceder que el otro? ________. ¿Cuál? ________. ¿Por qué? ________

b) Analicen el esquema de la figura 1.

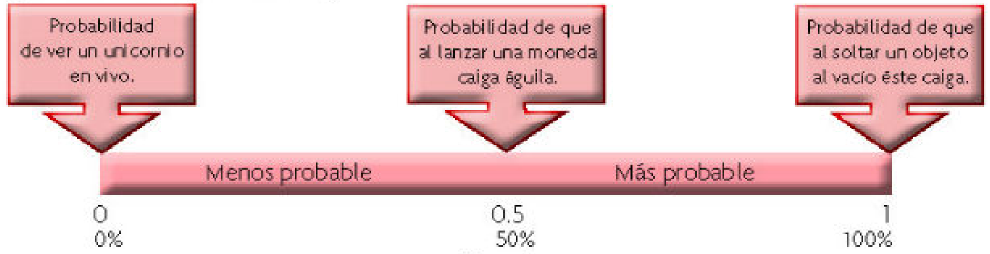


Figura 1

i) ¿Qué creen que representa el esquema de la figura 1? ____________________________ Dicho esquema se conoce como *escala de la probabilidad*.

ii) Comenten qué significa que:

- un evento tenga probabilidad 0. ____________________________
- un evento tenga probabilidad 1. ____________________________
- cuanto mayor sea la probabilidad de un evento, es más posible que éste ocurra. ____________________________

c) En la escala de la probabilidad de la figura 2, anoten en los recuadros azules los enunciados de las flechas verdes de tal manera que describan apropiadamente los distintos puntos de la escala.

- Evento imposible que ocurra.
- Evento seguro que ocurra.
- Evento muy probable que ocurra.
- Evento igualmente probable que ocurra o que no ocurra.
- Evento poco probable que ocurra.

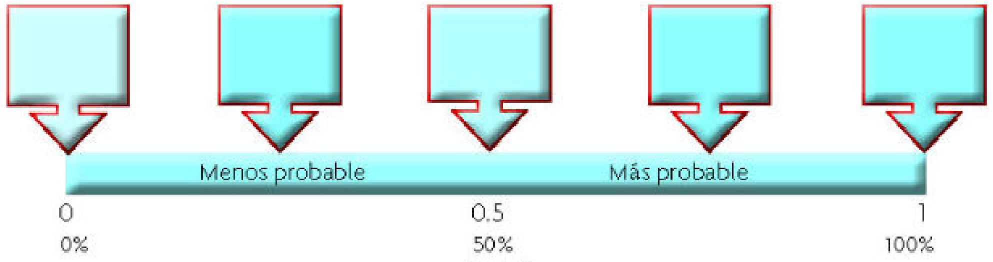


Figura 2

d) Escriban un ejemplo de un evento cuya ocurrencia tenga la probabilidad indicada por cada una de las flechas de la figura 2. Compartan sus ejemplos con los de otros equipos y juntos verifiquen que las situaciones propuestas sean correctas.

- ____________________________
- ____________________________
- ____________________________
- ____________________________
- ____________________________

¿Es posible escribir la probabilidad como una fracción? __________ Den un ejemplo de un evento cuya probabilidad sea $\frac{3}{4}$. ____________________________

¿La probabilidad se puede escribir como un decimal? __________ Den un ejemplo de un evento cuya probabilidad sea 0.2. ____________________________

¿La probabilidad se puede escribir como un porcentaje? __________ Den un ejemplo de un evento cuya probabilidad sea 25%. ____________________________

2. En la escala de la probabilidad de la figura 3, señala con una flecha el lugar que le corresponde a cada uno de los eventos.

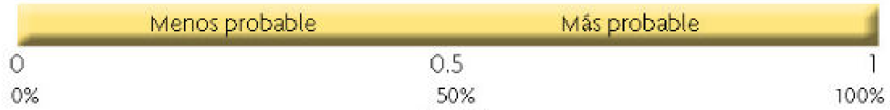


Figura 3


Figura 4

Evento A: La probabilidad de que el mes de mayo tenga 31 días.

Evento B: La probabilidad de obtener una esfera de color negro al extraer una esfera de la urna de la figura 4.

Evento C: La probabilidad de que al tirar un dado salga un 5.

3. Analiza cómo se ordenaron las urnas de la figura 5 de acuerdo con la probabilidad que hay de extraer una esfera negra en cada una de ellas.

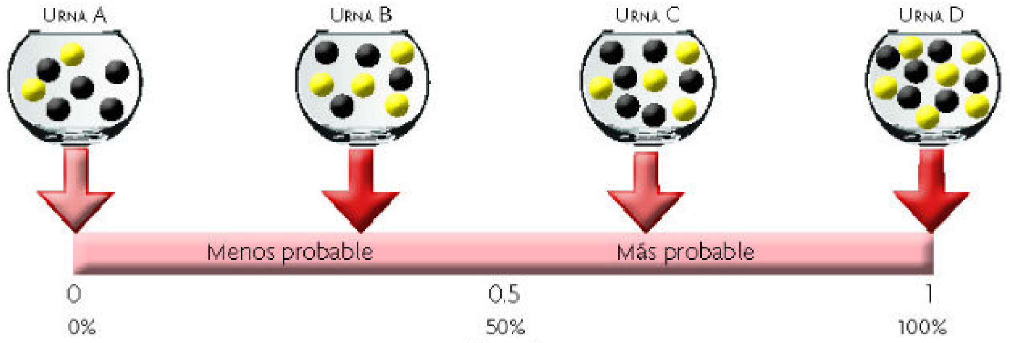


Figura 5

a) ¿Consideras que el ordenamiento es correcto? __________ Justifica tu respuesta.

____

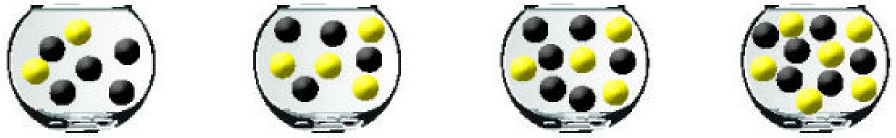
____

____

b) Si no estás de acuerdo con el ordenamiento anterior, ¿cómo debería ser el ordenamiento correcto? Indícalo por medio de las letras de cada urna.

____

Escribe la probabilidad de extraer, sin ver, una esfera negra de cada una de las urnas de la figura 6. Después verifica que el ordenamiento que realizaste en la escala de la probabilidad de la figura 5 realmente corresponde a la escala.



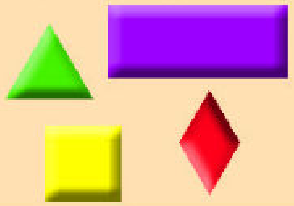
____=____=____ ____=____=____ ____=____=____ ____=____=____

Figura 6

Características de eventos complementarios y eventos mutuamente excluyentes e independientes

1. En la columna izquierda de la tabla 6.1, aparecen varios eventos; por ejemplo: "Cae 2 al tirar un dado".
   a) ¿Cómo llenarías la tabla 6.1 considerando, por ejemplo, que el evento complementario del primer renglón es aquel que hace que no se cumpla el evento "Cae 2 al tirar un dado"?

Tabla 6.1. Eventos y eventos complementarios

Evento	Evento complementario
Cae 2 al tirar un dado. 	
Al hacer girar la ruleta la flecha se detiene en el sector verde. 	
Al lanzar un par de dados la suma de ellos es un número par.	
Al elegir al azar una de las figuras siguientes se obtiene un polígono en el que todos sus ángulos interiores son rectos. 	
Al seleccionar al azar a un estudiante de secundaria, éste sea de tercer grado.	

   b) Los eventos de la columna derecha de la tabla 6.1 son los eventos complementarios de los eventos de la columna izquierda. ¿Qué características tienen los eventos complementarios? ________________

En parejas, calculen la probabilidad de ocurrencia de cada evento y de su evento complementario en la tabla 6.1. Después sumen estas probabilidades. ¿Qué regularidades encontraron? ________________.

Comparen las respuestas de esta actividad con las de otra pareja y lleguen a una conclusión sobre lo que caracteriza a un evento complementario. ________________

________________.

Soliciten la guía de su maestro para que, en grupo, lleguen a un consenso sobre lo que es un evento complementario.

2. En los siguientes casos se dan dos eventos. En parejas, decidan si pueden ocurrir ambos eventos a la vez (anoten sí en la línea morada) o si siempre que ocurra uno el otro no ocurre (anoten NO en la línea morada). Justifiquen su respuesta.
   a) Hay una urna con 10 bolas numeradas del 1 al 10 y se saca una bola al azar. Evento A: "Se obtiene un número par"; Evento B: "Se obtiene un número mayor que 5".
   ________ ¿Por qué? ________________.
   b) Se tira un dado. Evento A: "Se obtiene un número igual o menor que 5"; Evento B: "Se obtiene el número 6".
   ________ ¿Por qué? ________________.
   c) Se lanza una moneda. Evento A: "Cae águila"; Evento B: "Cae sol".
   ________ ¿Por qué? ________________.
3. En grupos de tres alumnos analicen los eventos de la tabla 6.2 e identifiquen las características de los eventos que son mutuamente excluyentes.

Tabla 6.2. Eventos mutuamente excluyentes

Eventos que son mutuamente excluyentes	Eventos que no son mutuamente excluyentes
Ejemplo 1. Al ver un partido de la selección de la escuela.	
Evento A: "La selección gana el partido". Evento B: "La selección pierde el partido". Evento C: "La selección empata".	Evento A: "La selección gana el partido". Evento B: "El marcador queda con más de dos goles de diferencia".
Ejemplo 2. Tirar un dado.	
Evento A: "Cae 2". Evento B: "Cae 6".	Evento A: "Cae un número mayor que 3". Evento B: "Cae un número par".

¿Qué características tienen los eventos que son mutuamente excluyentes? ________________

________________.

Contrasten la información del recuadro "Eventos mutuamente excluyentes" con las características que escribieron en la pregunta anterior. Si existen discrepancias, modifiquen su respuesta en los aspectos que consideren necesarios.

Si hay dos eventos mutuamente excluyentes, ¿entonces la suma de sus probabilidades es igual a 1? ______ Justifiquen su respuesta. ________________.

Eventos mutuamente excluyentes

Se dice que dos eventos son mutuamente excluyentes cuando no pueden ocurrir simultáneamente, es decir, si cuando ocurre uno no ocurre el otro y viceversa.

4. En equipos de tres alumnos lleven a cabo esta actividad.

a) Analicen los siguientes eventos, que no son eventos independientes, e identifiquen por qué no lo son.

i) Se quiere obtener 12 con la suma de los resultados de lanzar dos veces un mismo dado. En el primer lanzamiento del dado se obtiene 5.

Explicación: ______________________________

ii) En un grupo de tercero hay 30 alumnos en total, y se va a elegir al azar al presidente, el secretario y el tesorero del grupo. ¿Cuál es la probabilidad de que Yola sea la presidenta, Rafa el secretario y Memo el tesorero?

Explicación: ______________________________

b) Analicen ahora los siguientes ejemplos de eventos independientes.

i) En un aeropuerto, toda la semana se ha retrasado el vuelo que sale a las 21:00 horas. ¿Necesariamente se retrasará mañana?

Explicación: ______________________________

ii) Una persona contesta al azar un examen de 10 reactivos de opción múltiple en el cual cada reactivo tiene cuatro opciones de respuesta. ¿La probabilidad de elegir la respuesta correcta en cada reactivo es siempre la misma?

Explicación: ______________________________

c) ¿Qué características tienen los eventos que son independientes? ______________________________

Comparen la información del recuadro "Eventos independientes" con las características que escribieron en la pregunta anterior. Si existen diferencias, hagan las correcciones que les parezcan pertinentes.

Eventos independientes

Se dice que dos eventos de una experiencia aleatoria son independientes si la ocurrencia de uno de ellos no afecta la probabilidad del otro y viceversa.

Comenten con otros equipos si las afirmaciones de los siguientes incisos son verdaderas o falsas. Marquen con una ✓ los casos en que la afirmación sea verdadera.

a) Si al unir dos eventos mutuamente excluyentes A y B se obtiene el espacio muestral, entonces estos eventos son complementarios. ______________

b) La suma de probabilidad de eventos complementarios es igual a $\frac{1}{2}$. ______________

c) Se tienen dos eventos. Si la ocurrencia de uno implica la no ocurrencia del otro, estos eventos son mutuamente excluyentes. ______________

d) Los eventos mutuamente excluyentes no son independientes. ______________

e) En los eventos independientes la probabilidad de un evento afecta la probabilidad del otro. ______________

Analicemos la partida

Cuando algo nos late, ¿qué dice la probabilidad?

En equipos de cuatro alumnos, cada uno debe lanzar una moneda por su cuenta. Cuando alguno obtenga dos águilas seguidas avise a sus compañeros para que todos sean testigos del tercer volado; registren lo que sucede en la tabla 6.3 hasta completarla. Señalen con una S si cae sol y con una A si cae águila.

Tabla 6.3. Registro del tercer volado después de haber obtenido dos águilas seguidas

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

a) ¿Es más probable que en el tercer volado caiga sol? ______________.

b) Revisen juntos qué son los eventos independientes y comenten si en este caso se trata de eventos dependientes o independientes. ______________.

c) ¿Realmente le conviene a Carmen pedir sol en el tercer volado como le aconseja Miguel? Expliquen su respuesta. ______________.

Si se tienen dos eventos complementarios y se conoce la probabilidad de ocurrencia de uno de ellos, ¿puede conocerse la probabilidad de ocurrencia del otro evento? ______________.

Si su respuesta es afirmativa, expliquen cómo lograrlo. ______________.

Si dos eventos son mutuamente excluyentes y se conoce la probabilidad de que uno de ellos ocurra, ¿pueden saber la probabilidad de que el otro ocurra? ______________. Ilustren su respuesta con un ejemplo. ______________.

¿La probabilidad de dos eventos dependientes está relacionada? ______________. Expliquen su respuesta. ______________.

7. Diseño de una encuesta

Contenido 1.7. Diseño de una encuesta o un experimento e identificación de la población en estudio. Discusión sobre las formas de elegir el muestreo. Obtención de datos de una muestra y búsqueda de herramientas convenientes para su presentación.

Jaque al rey

Qué preguntar, a quién, cómo y para qué

Como parte de las políticas públicas de desarrollo social dirigidas a la población en situación vulnerable, lo cual incluye la lucha contra el hambre y la salud integral de los individuos, se puso en marcha un programa cuyo propósito es llevar recursos específicos a los lugares donde se necesita. Para ello, el gobierno federal realizó una encuesta en cierta región del país. Vía telefónica o por internet se formuló, a 5 000 personas, la siguiente pregunta: "¿Considera usted que come bien?"

Del total de personas encuestadas, 95% afirmó que comía bien. Sin embargo, cuando el resultado de esta encuesta se hizo público, un periódico de circulación nacional informó que esa cifra no concordaba con la realidad, ya que este diario documentó meses antes que en esa región mucha gente sufría desnutrición debido a la pobreza extrema y otro sector importante de la población padecía obesidad.

¿Qué características tiene la población a la que se dirigió la encuesta? ______

¿Consideras que la muestra elegida (vía telefónica y por internet) es representativa de esa población? ______. ¿Por qué? ______

¿La pregunta que se formuló es adecuada para lograr el propósito del programa social? ______

Si consideras que no, ¿cómo modificarías la pregunta? ______

Si pudieras incluir tres preguntas más a la encuesta, ¿cuáles harías? ______

Apertura

Glosario

población: se llama población a la totalidad de los individuos, objetos u observaciones que forman parte de un estudio.

▶ Diseño de una encuesta

1. Reúnete con dos o tres compañeros y comenten si han sido entrevistados en algún tipo de encuesta. Expongan su experiencia y lo que sepan respecto a una encuesta, por ejemplo:

   i) ¿Para qué sirve una encuesta? ______

   ii) ¿Quién realiza las encuestas? ______

   iii) Comenten y anoten en su cuaderno cómo prepararían una encuesta.

2. Completa la tabla 7.1 con las preguntas o con las posibles poblaciones a las que se dirigiría la encuesta.

Tabla 7.1. Preguntas de diferentes encuestas dirigidas a ciertas poblaciones

Pregunta de estudio	Población de estudio
¿Cuál es el modelo de celular favorito de los estudiantes de tercer grado de secundaria?	
¿Qué tipo de automóvil se recibe menos a cambio de otro en las agencias de autos usados?	
¿Cuál es el artista *pop* favorito de las mujeres mexicanas?	
	Lavanderías de una colonia de la Ciudad de México.
	Las alumnas que cumplen 15 años.
	Los estudiantes de la secundaria.

Reúnete con dos compañeros para analizar y responder las preguntas que se plantean.

- ¿Una misma pregunta de estudio podría aplicarse a distintas poblaciones? ______. ¿Por qué? ______
- ¿Una misma población podría ser sujeto de diversas preguntas de estudio? ______. Expliquen su respuesta. ______
- ¿Los resultados de una encuesta podrían variar dependiendo de la población a la que se apliquen? ______. Justifica tu respuesta. ______
- ¿Las preguntas de estudio en una investigación deben estar dirigidas a una población específica? ______. Justifiquen su respuesta. ______

El mundo en un tablero

Con el propósito de ampliar tus conocimientos respecto a la población de una encuesta, visita la siguiente página.

http://www.monografias.com/trabajos15/estadistica/estadistica.shtml (Consulta: 22 de junio de 2013.)

En parejas, comenten qué elementos deben cuidarse para que la información obtenida por medio de una encuesta sea lo más veraz posible. ______

3. Existen varios criterios para analizar distintos tipos de encuesta. En equipos, reflexionen en los siguientes y contesten las preguntas:

   i) ¿Es importante considerar el número de preguntas de una encuesta? ______. ¿Es mejor una encuesta con muchas preguntas o con pocas preguntas? ______. ¿Por qué? ______

   ii) ¿Es importante revisar la forma en que se redactan las preguntas? ______. Expliquen su respuesta. ______

   iii) Escriban qué opinión tienen acerca de la siguiente pregunta de una encuesta: "¿Verdad que no te gusta el helado de chocolate?" ______

iv) ¿En una encuesta hay que formular las mismas preguntas a todos los entrevistados? ______ ¿Expliquen por qué? ______

v) ¿En una encuesta deben hacerse las preguntas en el mismo orden o eso no altera los resultados? ______ ¿Por qué? ______

______

4. En equipos de tres alumnos analicen la situación que se propone.

El director de una secundaria está convencido de que, entre las medidas que pueden ayudar a reducir efectivamente el índice de sobrepeso y obesidad de los alumnos de su escuela, la promoción del deporte es fundamental. Para contar con mayor información y tomar una decisión adecuada, pidió a los estudiantes que diseñaran una encuesta y recibió las siguientes propuestas.

Propuesta 1
- ¿Cuál es el deporte que más te gusta?
- ¿Cuál es el deporte que menos te gusta?

Propuesta 2
- ¿Cuál es el deporte que se te facilita más?
- ¿Cuál es el deporte que te cuesta más trabajo practicar?

Propuesta 3
- ¿Cuál es el deporte que más te gustaría practicar?
- ¿Con qué recursos cuentas para realizar el deporte que más te gustaría practicar: equipo, tiempo, experiencia?

a) ¿Cuál de las tres propuestas de encuesta es las más adecuada para ofrecer la información que requiere el director? ______ ¿Por qué? ______

______

b) ¿Qué otras preguntas podrían incluirse en la propuesta para dar mejor información al director? ______

______

¿Por qué es importante hacer las preguntas que sugieren? ______

______

Apliquen las tres encuestas a todos los integrantes de su grupo y analicen si los resultados funcionan para los propósitos del estudio.

5. En parejas, redacten una lista de preguntas para llevar a cabo una encuesta entre sus compañeros con base en las siguientes preguntas de estudio.

i) ¿Consideran que el servicio de transporte público es bueno en su ciudad?

ii) ¿Los estudiantes de secundaria estudian de manera adecuada, es decir, logran un aprendizaje en el que confrontan la información nueva con sus conocimientos previos, reelaborando un conocimiento distinto en este proceso?

¿Cuál es la población de estudio en cada caso? ______ ¿Para qué podría servir cada una de las preguntas que plantearon? ______

______

¿Cómo podrían investigar estos datos de otra manera? ______
¿Alguna de las preguntas de estudio es subjetiva, es decir, puede ser interpretada de varias maneras? ______ ¿Cuál? ______

Elección de una muestra

1. Dos estudiantes decidieron llevar a cabo una investigación en la colonia en que viven acerca de la manera en que las familias cuidan a sus mascotas. Para ello, piensan aplicar una encuesta con las siguientes preguntas:

1. ¿Tienen mascota en casa?
2. ¿Qué mascota tienen?
3. ¿De qué forma la adquirieron?
4. ¿Cada cuándo la llevan al veterinario?
5. ¿Dónde duerme su mascota?
5. ¿Qué le dan de comer?
7. ¿Qué otros cuidados le proporcionan?

Según datos del último censo de población y vivienda, en su colonia hay 2 500 casas, ya sea unifamiliares o en departamentos, es decir, 2 500 familias distintas.

a) Si tardaran en promedio cinco minutos en realizar la encuesta en cada casa, ¿cuál es el número máximo de familias que podrían visitar en una hora? ______

b) Si sus papás les dan permiso de salir a hacer las encuestas durante tres horas al día, ¿les alcanzaría el tiempo a los dos para encuestar a las 2 500 familias? ______

c) ¿Qué harías para resolver el problema y poder realizar el estudio? ______

______

d) Uno de los estudiantes propone encuestar sólo a 250 de las 2 500 familias. ¿De este modo obtendrán resultados similares a los que se tendrían si se encuestara a todas las familias? ______. ¿Cómo seleccionarían a las 250 familias para que los resultados de la encuesta sean semejantes a los de encuestar a todas las familias?

______

e) ¿Qué pasaría si la encuesta respecto a las mascotas la hacen de manera voluntaria con las primeras 250 personas que quieran responder? ______ ¿Sería útil la información? ______ ¿Por qué? ______

f) ¿Qué pasaría si la encuesta la practican sólo con las familias de sus amigos, familiares y personas que viven cerca de su casa? ______

¿Será útil la información? ______ ¿Por qué? ______

g) ¿Consideras que con ambas estrategias tendrían los mismos resultados? ______

______

Muestras de una población

En muchas ocasiones, para llevar a cabo un estudio se aplican encuestas a una muestra de la población. La elección de una muestra debe estar encaminada a lograr la representatividad de la población de manera que, al aplicar el estudio, los resultados sean lo más parecidos a los que se tendrían si se hubiese encuestado a toda la población. Al hablar de la representatividad de una muestra se espera que este subgrupo sea una especie de copia pequeña de la población total.

Glosario

muestra: subconjunto o subgrupo de la población.

Reúnete con otro compañero y, con base en la actividad y la información del recuadro "Muestras de una población", contesten las preguntas.

- ¿Consideran que con la forma de elegir la muestra en los incisos *d* y *e* se obtendrá un resultado que sea representativo de toda la población? ______ ¿Por qué? ______

- El método para lograr que una muestra sea representativa es seleccionar la muestra al azar. ¿Qué estrategia seguirían para seleccionar la muestra de 250 familias al azar? ______

2. Reúnete con dos compañeros y analicen con cuál de las siguientes formas se obtiene una muestra representativa.

a) Para investigar si las personas tenían los electrodomésticos básicos se hizo una encuesta telefónica a 20 000 personas.

i) ¿En este caso cuál es la población? ______

ii) ¿La muestra obtenida será representativa de la población? ______ ¿Por qué? ______

b) En una línea aérea se hace una encuesta con la finalidad de valorar el nivel de satisfacción de sus clientes y para ello se la aplican a todos los pasajeros que tuvieron vuelos demorados.

i) ¿Cuál es la población a la que va dirigida la encuesta? ______

ii) ¿La muestra obtenida será representativa de la población? ______ ¿Por qué? ______

c) Una universidad hace una encuesta por internet acerca del libro preferido de las personas.

i) ¿Cuál es la población a la que se dirige la encuesta? ______

ii) ¿La muestra obtenida será representativa de la población? ______ ¿Por qué? ______

En los casos en que tengan argumentos para demostrar que no se hizo una muestra representativa, elaboren una propuesta de cómo realizar el muestreo.

Resultados de la encuesta

1. En parejas, analicen la siguiente situación. En una colonia se preguntó a los jóvenes cuál era su deporte favorito. Los resultados de la encuesta se presentan en la tabla 7.2 y en las figuras 2-4.

Tabla 7.2. Deporte favorito de los jóvenes

Deporte	Jóvenes
Futbol	469
Basquetbol	285
Atletismo	224
Volibol	22

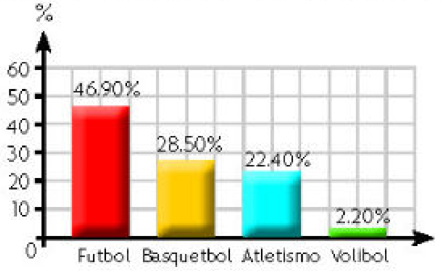


Figura 2

Figura 3

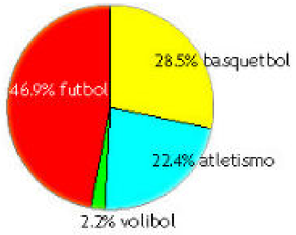


Figura 4

¿Cuál o cuáles de las representaciones anteriores es idónea para mostrar los resultados de la encuesta? ______ ¿Por qué? ______

¿La misma representación de los resultados de la encuesta funciona para cualquier propósito? ______ Justifiquen su respuesta. ______

Analicen la información del recuadro "Encuesta" y comenten con otras parejas qué entienden acerca de este concepto. Si tienen alguna duda sobre la información del recuadro, pidan a su maestro que les aclare lo que no hayan comprendido.

Encuesta

La encuesta es una técnica de investigación realizada sobre una población o una muestra de sujetos, utilizando procedimientos estandarizados de interrogación con la finalidad de obtener mediciones cuantitativas de una gran variedad de características objetivas y subjetivas de la población.

Analicemos la partida

Qué preguntar, a quién, cómo y para qué

En equipos, retomen la situación planteada en "Jaque al rey" sobre la encuesta para la implementación de un programa que lleve recursos específicos a la población en situación vulnerable, básicamente en la lucha contra el hambre y en favor de la salud integral de las personas. Contesten las siguientes preguntas.

a) ¿Es conveniente hacer una encuesta por teléfono o internet a una población en condición de extrema pobreza? ______ ¿Por qué? ______

b) ¿Cómo se ve afectada la investigación al realizar la encuesta por internet o teléfono? ______

c) ¿De qué manera llevarían a cabo la encuesta para recabar información de mayor calidad? ______

d) En el caso de las personas que sufren obesidad, ¿la pregunta "¿Considera usted que come bien?" puede brindar información útil para los propósitos del estudio, que son "llevar recursos específicos a los lugares donde se necesita"? ______ ¿Por qué? ______

¿Qué preguntas agregarían a la encuesta? ______

e) ¿Es posible encontrar personas desnutridas independientemente de su condición económica? ______ Expliquen por qué. ______

¿Puede una persona obesa estar desnutrida? ______ ¿Qué preguntas agregarían a la encuesta para recabar este tipo de información? ______

¿Qué elementos deben cuidarse para hacer una investigación por medio de una encuesta? ______

¿Cuál es el instrumento principal para la obtención de datos? ______

¿Cómo debe implementarse este instrumento? ______

¿Cuál es la metodología para diseñar una encuesta? ______

Con la guía de su maestro, comenten en plenaria las últimas cuatro respuestas con el propósito de llegar a un consenso.

Las cosas toman su tiempo

SITUACIÓN 1

Las fichas de la figura 1 se meten en una bolsa y luego se extrae una de ellas al azar.

Figura 1

Pregunta 1: Los eventos A: "Es una ficha amarilla" y B: "Es una ficha roja" son:

a) Mutuamente excluyentes.
b) Complementarios.
c) Mutuamente excluyentes y complementarios.
d) Ni mutuamente excluyentes ni complementarios.

Crédito total: Da la respuesta correcta.
Sin crédito: Proporciona una respuesta incorrecta.

Pregunta 2: Los eventos C: "Es una ficha menor o igual a 3" y D: "Es una ficha con alguno de los colores de la bandera de México" son:

a) Mutuamente excluyentes.
b) Complementarios.
c) Mutuamente excluyentes y complementarios.
d) Ni mutuamente excluyentes ni complementarios.

Crédito total: Da la respuesta correcta.
Sin crédito: Proporciona una respuesta incorrecta.

Pregunta 3: Los eventos E: "Es una ficha roja" y F: "Es una ficha par" son:

a) Mutuamente excluyentes.
b) Complementarios.
c) Mutuamente excluyentes y complementarios.
d) Ni mutuamente excluyentes ni complementarios.

Crédito total: Da la respuesta correcta.
Sin crédito: Proporciona una respuesta incorrecta.

Pregunta 4: Los eventos G: "Es una ficha roja" y H: "Es una ficha impar" son:

a) Mutuamente excluyentes.
b) Complementarios.
c) Mutuamente excluyentes y complementarios.
d) Ni mutuamente excluyentes ni complementarios.

Crédito total: Da la respuesta correcta.
Sin crédito: Proporciona una respuesta incorrecta.

Las fichas, la bolsa y el azar

SITUACIÓN 2

Considera ahora las fichas de la figura 2 que se meten en una bolsa y se extrae una al azar:

1 2 3 4

Figura 2

Pregunta 1: ¿Cómo las colorearías sabiendo que sólo hay fichas de dos colores: azul y rojo, y que los eventos A: "Sale una ficha par" y B: "Sale una ficha roja" son complementarios?

Crédito total: Da la respuesta correcta.
Crédito parcial: El razonamiento es correcto, así como el de los conceptos implicados, sin embargo, comete un error menor al colorear las fichas. Por ejemplo, fichas 2 y 4 rojas; 1 y 3 azules.
Sin crédito: No responde a la pregunta o confunde los conceptos.

Pregunta 2: ¿Cómo las colorearías sabiendo que sólo hay fichas de dos colores: azul y rojo, y que los eventos: C: "Sale una ficha impar" y D: "Sale una ficha roja" son mutuamente excluyentes, pero no son complementarios? Considera que el 4 es rojo.

Crédito total: Da la respuesta correcta.
Crédito parcial: El razonamiento es correcto, así como el de los conceptos implicados, sin embargo, comete un error menor al colorear las fichas. Por ejemplo, impares azules, pares rojas.
Sin crédito: No responde a la pregunta o confunde los conceptos.

¿En verdad somos complementarios?

SITUACIÓN 3

En una urna hay dos bolas: una negra y una blanca. Se extrae una bola y se esconde sin mirar su color.

Pregunta 1: Los eventos A: "La bola que queda es blanca" B: "La bola extraída es blanca" son:

a) Mutuamente excluyentes.
b) Complementarios.
c) Mutuamente excluyentes y complementarios.
d) Ni mutuamente excluyentes ni complementarios.

Pregunta 2: La probabilidad de que la segunda bola sea negra es:

a) 1
b) $\frac{2}{3}$
c) $\frac{1}{2}$
d) Es necesario conocer el color de la primera bola extraída.

Crédito total: Da la respuesta correcta.
Sin crédito: Proporciona una respuesta incorrecta.

Cuando el sentido común falla

SITUACIÓN 4

Simultáneamente se tira un dado y se lanza una moneda. Los últimos cinco experimentos han sido: (2, sol), (4, sol), (6, sol), (6, sol) y (4, sol).

Ana dice que la probabilidad de que caiga un número par y sol es cercana a cero, Bertha afirma que es $\frac{1}{2}$, Sandra dice que es $\frac{1}{4}$ y Emilio asegura que es cero. ¿Quién tiene razón?

Crédito total: Da la respuesta correcta.
Crédito parcial: Da la respuesta, aunque el concepto de independencia es confuso o contradictorio.
Sin crédito: No responde a la pregunta, confunde los conceptos implicados o usa una estrategia equivocada.

Bloque 2

Aprendizajes esperados:

- Explica el tipo de transformación (reflexión, rotación o traslación) que se aplica a una figura para obtener la figura transformada. Identifica las propiedades que se conservan.
- Resuelve problemas que implican el uso del teorema de Pitágoras.

Competencias que se favorecen:

Resolver problemas de manera autónoma.
Comunicar información matemática.
Validar procedimientos y resultados.
Manejar técnicas eficientemente.

Algunas pagodas en Tailandia tienen diseños simétricos basados en la traslación de figuras. Esta propiedad transmite al observador una sensación de armonía y movimiento ascendente del edificio.
Pagoda china en Tailandia

8. Solución de ecuaciones cuadráticas por factorización

Contenido 2.1. Uso de ecuaciones cuadráticas para modelar situaciones y resolverlas usando la factorización.

Jaque al rey

En equilibrio con la naturaleza

Una arquitecta que busca siempre la armonía entre la naturaleza y los espacios construidos elabora un boceto para un proyecto de condominios horizontales en un terreno cuadrado (figura 1).

A fin de determinar la medida ideal del espacio que ocuparán los condominios plantea el modelo matemático $x^2 + 100x + 2\,500$ a partir del boceto que hizo.

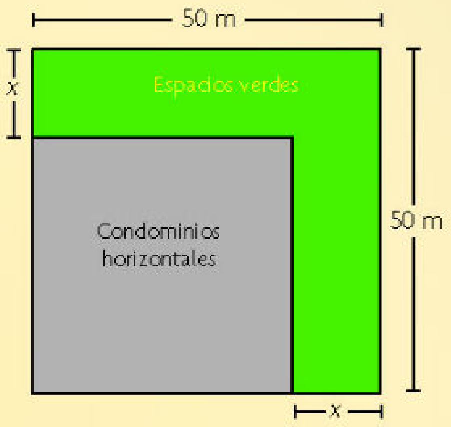


Figura 1

En el modelo matemático planteado por la arquitecta, ¿qué representa x? __________.

Explica cómo se llegó a la conclusión de que el área de los condominios está representada por la expresión $x^2 - 100x + 2\,500$. __________.

¿La ecuación $x^2 - 100x + 2\,500 = 1250$ representa el hecho de que el área de los condominios y el área de los espacios verdes son iguales? ______. ¿Por qué? __________.

¿Cuál debe ser el valor de x para que el área de los condominios horizontales sea igual a la de los espacios verdes? __________.

Apertura

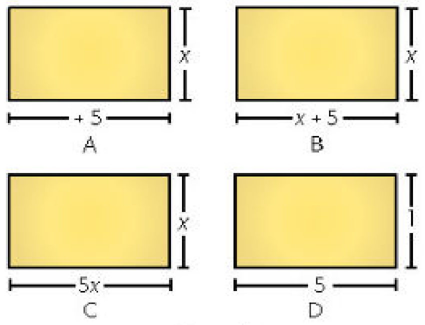


Figura 2

▶ Resolución de ecuaciones por factorización

1. Se desea construir un rectángulo cuya base mida 5 cm más que la medida de su altura. ¿Cuál de las ilustraciones de la figura 2 muestra lo que se plantea en este problema? __________.

a) Da tres ejemplos de medidas de rectángulos que cumplan con la condición pedida de "un rectángulo cuya base mida 5 cm más que la medida de su altura".

- Ejemplo 1. Base: ______ cm. Altura: ______ cm.
- Ejemplo 2. Base: ______ cm. Altura: ______ cm.
- Ejemplo 3. Base: ______ cm. Altura: ______ cm.

b) ¿Cuántos rectángulos distintos puede haber que cumplan con la condición dada en el problema? ______. Justifica tu respuesta. ______________________.

c) ¿Cuál o cuáles de las siguientes ecuaciones expresan el hecho de que un rectángulo tiene un área de 36 cm² y su base mide 5 cm más que la medida de su altura? ______.

i) $(5x)(1) = 36$ *ii)* $(x + 5)(1) = 36$

iii) $(x + 5)(x) = 36$ *iv)* $(5x)(x) = 36$

d) Reúnete con otros compañeros y analicen qué harían para resolver la ecuación $(x + 5)(x) = 36$. ¿Cuáles son las medidas del rectángulo que cumple las condiciones dadas?

______________________.

En parejas, diseñen un procedimiento para resolver el problema siguiente y resuélvanlo.

El cuadrado de un número es igual al doble del mismo. ¿De qué número se trata? ______.

Comenten con otra pareja los procedimientos que siguieron para hallar la solución del problema anterior.

2. Para resolver el problema "El cuadrado de un número es igual al triple del mismo. ¿De qué número se trata?", un estudiante siguió los pasos mostrados abajo para plantear una ecuación y resolverla. Escribe en los recuadros lo que hizo en cada paso:

Paso 1: $x^2 = 3x$

Paso 2: $x^2 - 3x = 0$

Paso 3: $x(x - 3) = 0$

¿A qué resultados del problema se puede llegar a partir de la ecuación $x(x - 3) = 0$? ______

______________________.

Explica tu respuesta. ______________________

______________________.

b) Para resolver el problema "El largo de un terreno es 30 m mayor que su ancho. Si su área es de 400 m², ¿cuánto miden los lados del terreno?", dos estudiantes comparan las ecuaciones que planteó cada quien.

Ecuación del estudiante A: $x(x + 30) = 400$

Ecuación del estudiante B: $x^2 - 30x - 400 = 0$

i) ¿Con ambas ecuaciones se puede resolver el problema planteado? ______. Explica tu respuesta. ______________________

______________________.

ii) El estudiante B, que planteó la ecuación $x^2 - 30x - 400 = 0$, la reescribió de la siguiente manera: $(x - 40)(x + 10) = 0$.

¿Qué procedimiento siguió para transformar la expresión $x^2 - 30x - 400$ en $(x + 40)(x - 10)$?

____

______________________.

A partir de la ecuación $(x - 40)(x + 10) = 0$, ¿qué procedimiento se puede seguir para encontrar la respuesta al problema planteado? ______________________

______________________.

Halla la respuesta. ______________________

______________________.

En parejas, analicen con qué propósito el estudiante B reescribió la ecuación $x^2 - 30x - 400 = 0$ como $(x - 40)(x + 10) = 0$. Si no les queda clara la intención de esta transformación, pidan la guía de su maestro para explicarla.

El mundo en un tablero

Factorizar un polinomio consiste en expresarlo como un producto de factores que, al multiplicarse entre sí, dan el polinomio original. Por ejemplo:

$$ax + ay = a(x + y) \quad \text{o} \quad 4x^2 - 9y^2 = (2x + 3y)(2x - 3y)$$

Con el propósito de mejorar tus habilidades para factorizar polinomios, visita la página http://platea.pntic.mec.es/~anunezca/ayudas/factorizacion/factorizacion_polinomios.htm (Consulta: 15 de junio de 2013.)

En parejas, comenten de qué manera se ha usado la factorización para resolver los problemas vistos en esta lección.

3. Para resolver la ecuación $x^2 + 4x - 45 = 0$ se siguió el procedimiento mostrado abajo. Analiza cada paso y escribe lo que se hizo.

Paso 1: $x^2 + 4x - 45 = 0$

$x^2 + 4x - 45 + 45 = 0 + 45$

De manera que:

$x^2 + 4x = 45$

Paso 2: $x(x + 4) = 45$

Paso 3: $x(x + 4) = 45$
$5(9) = 45$
$5(5 + 4) = 45$
$x = 5$

Analiza con otros compañeros si es posible seguir el procedimiento anterior para resolver cualquier ecuación cuadrática. Si no es posible, digan para qué tipo de ecuaciones sí lo es y para cuáles no. ____

Más factorizaciones para resolver ecuaciones cuadráticas

1. En parejas, analicen cómo está formado el cuadrilátero *ABCD* de la figura 3.

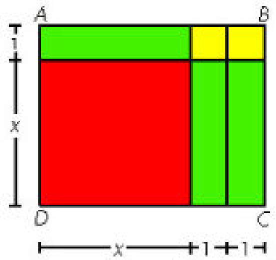
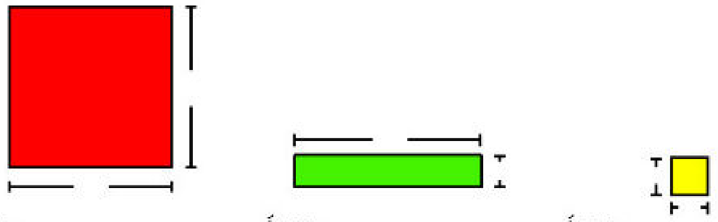


Figura 3

a) ¿Es un cuadrado o un rectángulo? __________. ¿Qué argumentos pueden considerar para afirmar que se trata de un cuadrado o un rectángulo? ______________________________

b) Consideren la información proporcionada en la figura 3 y coloquen el número o la literal que corresponde a cada una de las cotas de las piezas de la figura 4. ¿Cuál es la expresión que representa el área de cada una de las piezas que forman el cuadrilátero *ABCD*? Escribe tus respuestas en las líneas azules.



Área = __________ Área = __________ Área = __________

Figura 4

c) Escribe la expresión algebraica que represente la medida de la base del cuadrilátero *ABCD*. ______________________________

d) Escribe la expresión algebraica que represente la medida de la altura del cuadrilátero *ABCD*. ______________________________

e) ¿Qué operación debe realizarse para calcular el área de *ABCD*? __________. Indícala por medio de una expresión algebraica. __________.

f) Supongan que el área del cuadrilátero *ABCD* mide 110 cm². Determinen si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas.

- Con la ecuación $(x + 1)(x + 2) = 110$ es posible calcular el valor de x. __________.
- La ecuación $(x + 1)(x + 2) = 110$ es de segundo grado. __________.

Para resolver la ecuación $(x + 1)(x + 2) = 110$ un estudiante pensó: "Primero tengo que buscar dos números que multiplicados entre sí den 110 y que, a la vez, uno de ellos sea mayor que el otro por una unidad".

Encuentra tres parejas de números que, multiplicados entre sí, den 110. Por ejemplo: 22×5.

____

¿En qué pareja un número es mayor que el otro por una unidad? __________.

g) Observa que $(10)(11) = 110$. Por tanto, si $(x + 1)(x + 2) = 110$ se tiene que:

$$(x + 1) = 10 \text{ y } (x + 2) = 11$$

- ¿Qué número sumado con 1 da 10? __________
- ¿Qué número sumado con 2 da 11? __________

h) Verifica que al asignar el valor de 9 a x en la figura 3 efectivamente el área sea de 110 cm².

El mundo en un tablero

Hace aproximadamente 3 500 años los babilonios y los egipcios resolvían problemas que daban lugar a ecuaciones. Descarga de la página cipri.info/resources/HIST-1-1-1-egipto.pdf un documento y analiza cómo lo hacían. (Consulta: 21 de enero de 2017.)

¿Los procedimientos del documento que descargaste sirven para resolver cualquier tipo de ecuación de segundo grado? __________. Explica por qué. ______________________________

2. Reúnete con dos compañeros y en cada inciso escriban una ecuación con la que puedan resolver los siguientes problemas y hallen la solución de dicha ecuación.

a) Un rectángulo mide 108 cm² de área y su ancho es 3 cm menos que su largo. ¿Cuáles son las medidas de ese rectángulo? __________.

b) Encuentren dos números cuya suma sea 16 y cuyo producto sea 63. __________.

Escriban un problema que pueda resolverse con los mismos procedimientos que utilizaron en los problemas anteriores y encuentren la solución. ______________________.

3. En parejas, resuelvan los problemas que se plantean.

a) ¿De qué factores depende la trayectoria de una bala de cañón? ______________________.

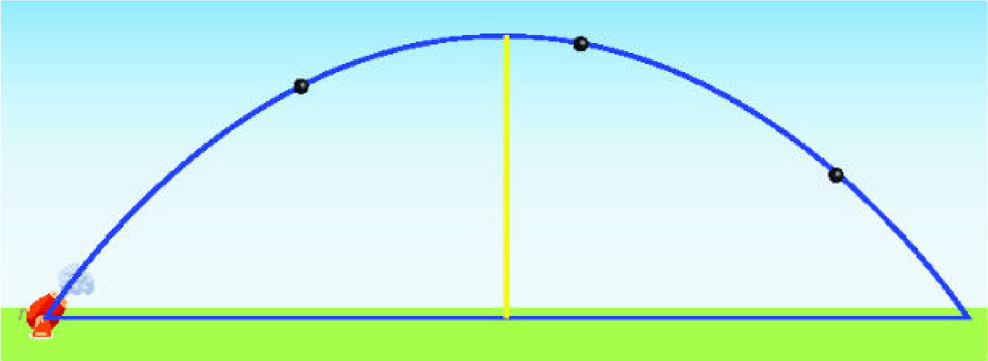


Figura 5

Si la trayectoria de la bala del cañón de la figura 5 se modela con la expresión $f(t) = t^2 + 14t - 40$, ¿cómo puede saberse cuánto tiempo estuvo la bala en el aire? ______________________.

Escriban en su cuaderno un procedimiento para determinar la altura máxima que alcanzó la bala del cañón. ¿A qué altura se encontrará la bala después de 5 s de haber sido lanzada? ______________________.

b) Laura leyó en una revista de divulgación científica que el peso promedio (en kg) ganado por una raza de puercos, sometidos a una dieta de harina de sorgo, en comparación con los que se alimentan sin esta harina, se calcula por medio de la expresión $f(p) = p^2 + p$, donde p representa el porcentaje de harina de sorgo en el alimento del puerco.

Si esta información es cierta, ¿qué porcentaje de harina de sorgo se ha puesto en el alimento de los puercos que han aumentado 6 kg más que los que no la han consumido? ______________________.

¿Cómo se podría saber cuál es el mayor porcentaje de harina de sorgo que conviene incluir en la dieta de esta raza de cerdos?

Comparen con otras parejas tanto sus resultados como los procedimientos que siguieron. Si requieren ayuda de su maestro de ciencias, solicítenla para entender mejor en qué consiste el tiro parabólico.

Analicemos la partida

En equilibrio con la naturaleza

En parejas, retomen el problema planteado en la sección "Jaque al rey".

a) Escriban una expresión algebraica que corresponda a la base en que se construirán los condominios horizontales. ______________________.

b) Completen la ecuación que corresponde a la superficie de los condominios.

$$(\qquad\qquad)^2 = 1250$$

c) ¿Qué relación hay entre las expresiones $x^2 - 100x + 2500$ y $(50 - x)^2$? ______________________.

d) ¿Por qué en el inciso *b* la ecuación está igualada a 1250? ______________________.

¿Podría haberse igualado a 25^2? __________. ¿Por qué? ______________________.

e) Escribe el procedimiento con el que se resuelve la ecuación $(50 - x)^2 = 1250$. ______________________.

f) Un estudiante resolvió la ecuación del inciso *e* con el siguiente procedimiento. Analízalo y escribe lo que fue haciendo en cada paso.

I. $(50 - x)^2 = 1250$ ______________________.

II. $50 - x = \sqrt{1250}$ ______________________.

III. $50 - x = \pm\ 35.35$ ______________________.

IV. $x_1 = 85.35$ ______________________.

V. $x_2 = 14.65$ ______________________.

g) ¿El procedimiento del estudiante es correcto? __________. Justifica tu respuesta. ______________________.

Resuelvan la ecuación $x^2 + 2x + 2 = 0$. Comenten con otras parejas tanto el procedimiento como la solución obtenida. Si hay desacuerdos, pidan la guía de su maestro para encontrar la fuente del error.

9. Traslación y rotación

Contenido 2.2. Análisis de las propiedades de la rotación y de la traslación de figuras.

Jaque al rey

Estética de la rotación y la traslación en el agua

Un equipo olímpico de nado sincronizado estudia las rutinas de los rivales más fuertes de la competencia. En una primera fase observan fotos de las coreografías (figuras 1*a*, 1*b*, 1*c* y 1*d*).


Figura 1a


Figura 1b


Figura 1c


Figura 1d

Cada foto representa un momento clave de la coreografía —que los jueces suelen tomar en cuenta para la calificación final— y el análisis se hace en torno a los desplazamientos de cada grupo o pareja de nadadoras; en algunos casos se trata de una traslación y en otros de una rotación.

¿En qué figuras hay un movimiento de rotación? __________ ¿En cuáles hay uno de traslación? __________ ¿De qué manera se distingue un movimiento de rotación de uno de traslación? ______________________________

En los casos de una traslación, indica con una flecha cómo se trasladaron las nadadoras. ¿Cómo se puede identificar la dirección en que se efectúan las traslaciones? __________

En el caso de la rotación, señala en cada imagen el centro de rotación. ¿Cómo se puede identificar dónde se ubica el centro de rotación? ______________________________

Apertura

Traslación de figuras

1. En la figura 2 se aprecian dos balcones casi idénticos en el muro de una casa. Analiza la posición de los balcones y los puntos amarillos que se han colocado en ambos.


Figura 2

a) Escribe algunas características geométricas que sean iguales en ambos balcones. __________
____
____
____
____

b) En los balcones de la figura 2 identifica los puntos correspondientes y une cada par con un vector como éste:

Glosario

vector: en física a las flechas como las de la figura 3 se les llama vectores. Un vector se caracteriza por tener *magnitud o tamaño, dirección y sentido.*

Figura 3

c) Mide cada una de las flechas que trazaste en los balcones. ¿Todas miden lo mismo o tienen medidas distintas? __________ ¿Todas tienen el mismo sentido? __________ ¿Todas tienen la misma dirección? __________

d) Si se quisiera dibujar en otra hoja este par de balcones, ¿consideras que se puede usar la traslación para dibujar el balcón de la derecha a partir del de la izquierda? __________ Explica por qué.
____
____

e) Reúnete con un compañero y analicen las traslaciones de la figura 4.

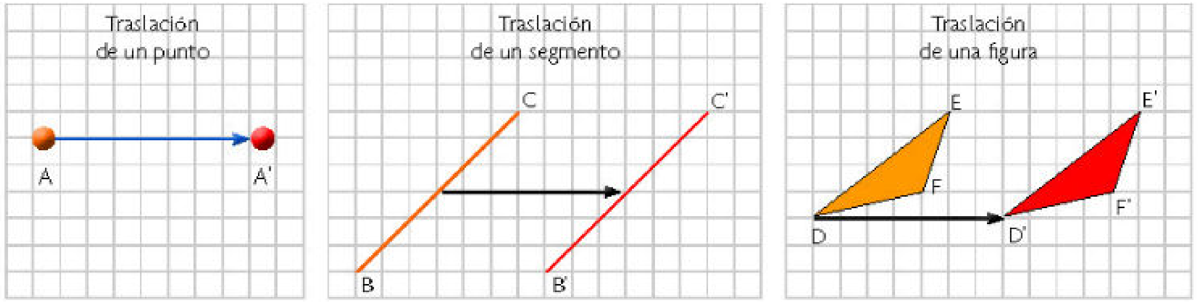


Figura 4

f) ¿Al trasladar un punto se obtiene otro punto? __________ Traza en tu cuaderno un ejemplo distinto al de la figura 4. ______________________________

g) ¿En la traslación de un segmento se obtiene otro segmento? ________ ¿El segmento trasladado es paralelo al segmento original? ________ ¿Los segmentos original y el trasladado son congruentes entre sí? ________ Justifiquen sus respuestas. ________

En la traslación de una figura, ¿cada uno de los puntos que la forman se desplaza la misma distancia y en la misma dirección? ________ ¿En una traslación la figura original conserva su misma forma o cambia de forma? ________ ¿Qué características de una figura trasladada son iguales respecto a la figura original? ________

Escriban una definición de traslación de figuras y compárenla con la de otra pareja. Si hay discrepancias, hagan las correcciones pertinentes para llegar a una definición consensada.

2. Indiquen cuál o cuáles de los siguientes casos (figuras 5*a*, 5*b*, 5*c* y 5*d*) corresponden a una transformación geométrica conocida como traslación. ________

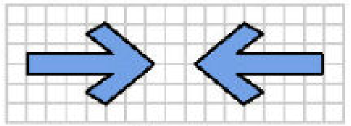


Figura 5*a*

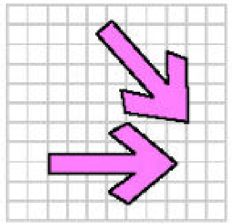


Figura 5*b*

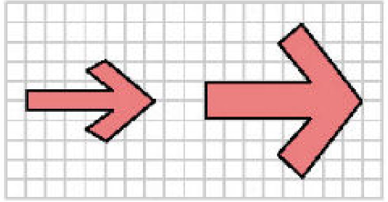


Figura 5*c*

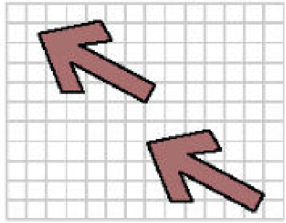


Figura 5*d*

En los casos en que no se trate de una traslación, argumenten por qué no lo es. ________

3. Utiliza las características de un vector señaladas en el glosario para obtener la traslación en la figura 6.

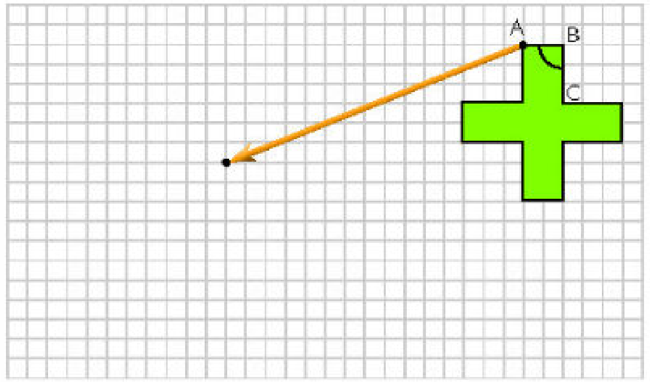


Figura 6

a) ¿Cuánto mide el segmento $\overline{AB}$? ________ ¿Cuánto mide el segmento correspondiente $\overline{A'B'}$ en la figura trasladada? ________
¿Todos los segmentos de la figura original miden lo mismo que sus correspondientes en la figura trasladada? ________ ¿Por qué? ________

b) ¿El segmento $\overline{AB}$ es paralelo al segmento correspondiente $\overline{A'B'}$ en la figura trasladada? ________ ¿Todos los segmentos de la figura original son paralelos a sus correspondientes en la figura trasladada? ________ Justifica tus respuestas. ________

c) ¿Cuánto mide el ángulo *ABC*? ________ ¿Cuánto mide el ángulo correspondiente *A'B'C* en la figura trasladada? ________ ¿Todos los ángulos de la figura original miden lo mismo que sus correspondientes en la figura trasladada? ________ Explica por qué. ________

d) ¿Son iguales el área de la figura original y la de la figura trasladada? ________ Calcula las áreas de ambas figuras para verificar tu respuesta.

e) Utiliza el vector de la figura 7 para obtener la traslación del triángulo amarillo.

i) Comenta con otros compañeros el procedimiento que seguiste para realizar esta traslación. ________

ii) ¿Qué posición tienen las rectas que unen los puntos homólogos respecto al vector? ________

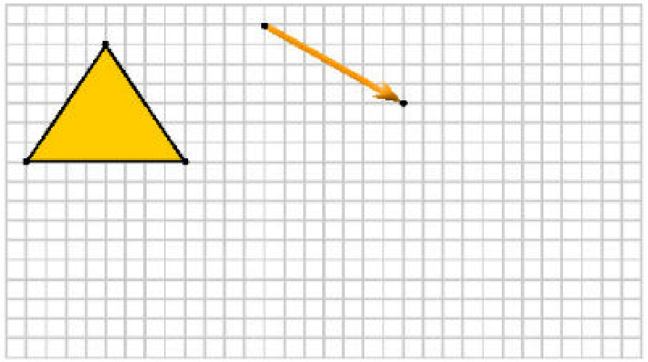


Figura 7

Escribe en tu cuaderno un instructivo detallado para realizar la traslación de una figura.

¿Existen otros procedimientos para hacer la traslación? ________ Analiza el procedimiento de la figura 8.

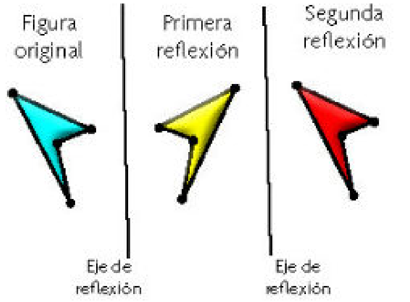


Figura 8

¿Qué procedimiento se siguió? ________ ¿La segunda reflexión es una traslación de la figura original? ________ Explica por qué. ________

4. El dibujo de la figura 9 está incompleto: se ha realizado una traslación de un rostro. Identifica y dibuja el vector que señala la magnitud de la traslación. A continuación, traslada el rostro central en la misma dirección y magnitud que el vector hallado.

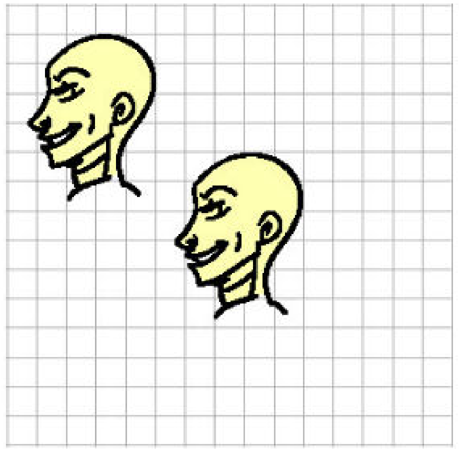


Figura 9

Rotación

1. En la ruleta de una kermés (figura 10) se van a dar tres premios distintos.

Figura 10

a) Bosqueja lo mejor que puedas las imágenes que faltan en la figura 10. Observa que premios iguales van en colores iguales. ¿Los dibujos que hiciste son traslaciones de los originales? ________. ¿Por qué? ________________.

b) ¿Cómo va cambiando la posición del lápiz, el oso y el papalote cuando se hace girar la ruleta? ________________.

c) Considera uno de los papalotes. ¿De cuántos grados debe ser el giro para que vuelva a estar en la posición original? ________________.

Al hacer rotar una figura se tienen un ángulo y un centro de rotación. Por ejemplo, en las siguientes manecillas (figura 11) el centro de rotación es el punto *P* y el ángulo de rotación se indica en cada caso.

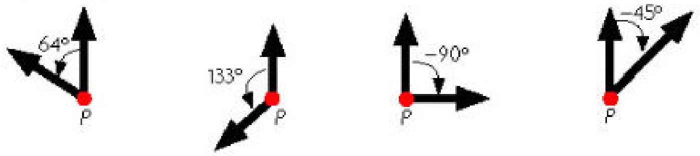


Figura 11

Cuando la rotación es en el sentido de las manecillas del reloj, ¿el ángulo de rotación es positivo o negativo? ________. Cuando la rotación es en sentido contrario al de las manecillas del reloj, ¿el ángulo es positivo o negativo? ________________.

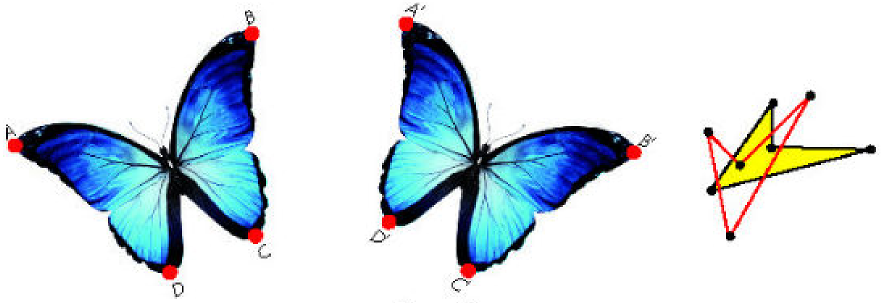


Figura 12

Dibuja en tu cuaderno un par de manecillas que representen los siguientes grados de rotación: 0, 180, 150 y −100.

2. En la figura 12, se presenta la rotación de una mariposa y un polígono. Encuentra y señala el centro de rotación en ambos casos.

a) Reúnete con otros compañeros, contrasten sus procedimientos y verifiquen que sean correctos.

b) En la figura 13 se muestra el procedimiento que siguió un estudiante para encontrar el centro y el ángulo de rotación de las figuras. Analícenlo y compárenlo con el método que ustedes siguieron.

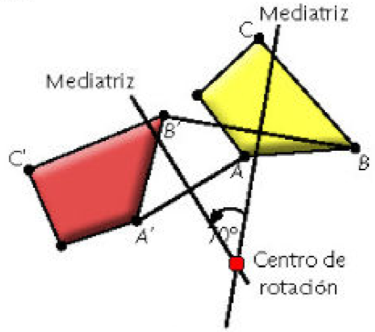


Figura 13

c) ¿Cuánto mide el segmento $\overline{AB}$? ________. ¿Cuánto mide el segmento correspondiente $\overline{A'B'}$ en la figura que se ha hecho rotar? ________. ¿Todos los segmentos de la figura original miden lo mismo que sus correspondientes en la figura rotada? ________________

d) ¿Cuánto mide el ángulo *ABC*? ________. ¿Cuánto mide el ángulo correspondiente *A'B'C'* en la figura que se ha hecho rotar? ________. ¿Todos los ángulos de la figura original miden lo mismo que sus correspondientes en la figura rotada? ________.

Reúnete con dos compañeros y analicen si en la rotación de un punto, un segmento o una figura se cumple lo siguiente:

- En la rotación de un segmento, ¿el segmento rotado es siempre paralelo y de la misma longitud que el original? ________. ¿Por qué? ________________.
- En la rotación de un ángulo, ¿el ángulo rotado tiene siempre la misma abertura que el original? ________. ¿Por qué? ________________.

Posteriormente, escriban en su cuaderno qué es una rotación.

El mundo en un tablero

La Tierra efectúa simultáneamente un movimiento de traslación y otro de rotación. Visita la página http://conteni2.educarex.es/mats/14393/contenido/ (Consulta: 22 de junio de 2013.)

Analiza si los principios de traslación y rotación de las figuras estudiados en esta lección son válidos para los movimientos de nuestro planeta.

Analicemos la partida

Estética de la rotación y la traslación en el agua

En equipos de tres alumnos compartan el trabajo que realizaron.

a) En un pedazo de hoja calquen y recorten uno de los brazos de la nadadora (figura 14).

b) Trasladen la pieza a la derecha hasta reproducir la figura que formaron las nadadoras (figura 15).

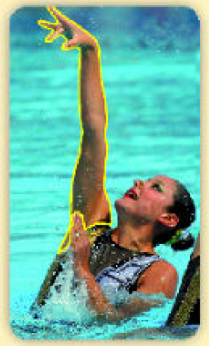


Figura 14


Figura 15

c) Comenten con sus compañeros cómo se puede trazar el vector.

d) En la figura 16 tracen un punto en la rodilla izquierda de una de las nadadoras. Luego, tracen un punto en la rodilla correspondiente de la otra nadadora. Unan estos puntos mediante un segmento de recta y tracen su mediatriz. ¿La mediatriz tendrá que pasar por el centro de rotación? ______


Figura 16

e) ¿Qué otros trazos tendrían que realizar para encontrar el centro de rotación? ______

Analicen con otro equipo cómo se puede identificar el centro de rotación en una figura. ¿Cómo se puede trazar el vector de traslación en una figura que ha sido trasladada? ______

10. Simetría axial y central, rotación y traslación

Contenido 2.3. Construcción de diseños que combinan la simetría axial y central, la rotación y la traslación de figuras.

Jaque al rey

Por la blanda arena que lame el mar[1]

En la figura 1 se muestra un diagrama de las huellas que dejó una persona al caminar sobre la arena de la playa.

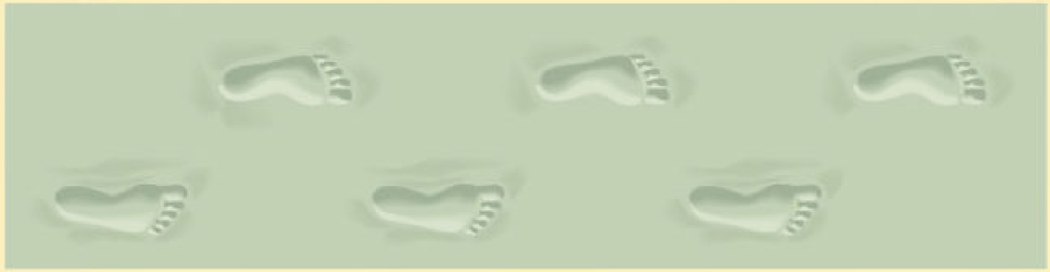


Figura 1

Cuando Miguel ve las huellas reflexiona en la información que puede extraer de un rastro así. Por ejemplo: la dirección aparente del caminante o el espacio que hay entre una huella y otra pueden indicar que tal vez la persona sufra un problema de locomoción...

¿Hay simetría en el dibujo de las huellas? ______. ¿Qué implicación puede tener esto para el caminante? ______.

¿Hay traslaciones o rotaciones? ______. ¿Es posible que al caminar quede un rastro simétrico? ______. Explica por qué. ______.

¿Qué instrucciones le darías a un compañero para reproducir el dibujo de la figura 1? ______.

Apertura

▶ Rotación y traslación

1. Cada estructura de la figura 2 se formó pegando siete cubos de madera.

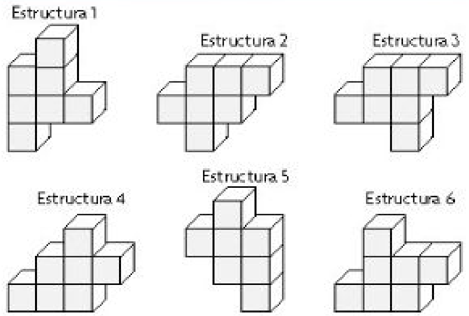


Figura 2

[1] Primer verso de la canción "Alfonsina y el mar", de Axel Ramírez y Félix Luna, dedicada a la poeta argentina Alfonsina Storni.

a) Gira o traslada mentalmente las estructuras y escribe cuáles son iguales entre sí. ______

b) En la figura 3 se realizaron movimientos de rotación y de traslación sobre el cuadrilátero *A*. Identifica si en cada paso de la secuencia se realizó una rotación o una traslación.

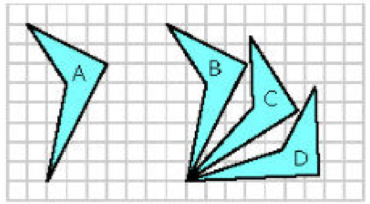


Figura 3

- Del cuadrilátero *A* al *B* se realizó un movimiento de: ______
- Del cuadrilátero *B* al *C* se realizó un movimiento de: ______
- Del cuadrilátero *C* al *D* se realizó un movimiento de: ______

c) En la figura 4 se hicieron movimientos de rotación y de traslación sobre el hexágono *A*.

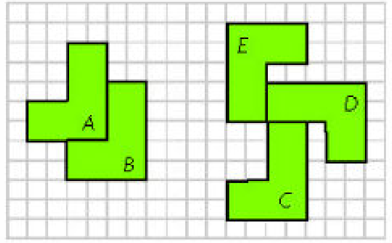


Figura 4

Identifica si en cada paso de la secuencia se realizó una rotación o una traslación.

- Del hexágono *A* al *B* se realizó un movimiento de: ______
- Del hexágono *B* al *C* se realizó un movimiento de: ______
- Del hexágono *C* al *D* se realizó un movimiento de: ______
- Del hexágono *D* al *E* se realizó un movimiento de: ______

d) Identifica los movimientos que se efectuaron en las figuras 5 y 6 para obtener el polígono *B* a partir del *A*.

- En la figura 5, de *A* a *B* se realizó una: ______
- En la figura 6, de *A* a *B* se hizo una: ______

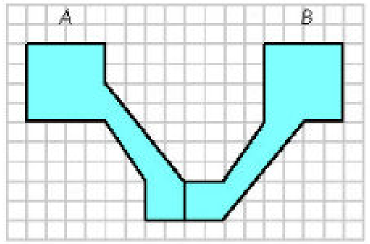


Figura 5

¿Cómo puedes identificar en qué situaciones ha habido rotación o traslación de una figura? ______

¿Qué características tiene cada una de estas transformaciones geométricas? ______

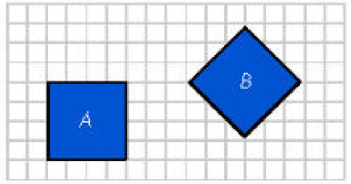


Figura 6

2. Reúnete con dos compañeros y analicen qué transformaciones geométricas (traslaciones, rotaciones, simetrías) se usaron para elaborar cada uno de los diseños de las figuras *7a* y *7b*.

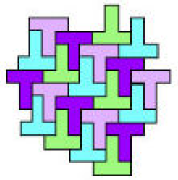


Figura 7*a*

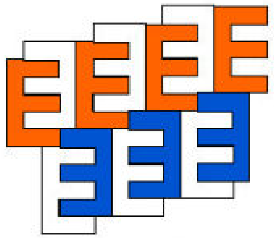


Figura 7*b*

a) Trasformaciones geométricas realizadas en la figura 7*a*. ______

b) Trasformaciones geométricas realizadas en la figura 7*b*. ______

c) En un pedazo de cartulina, cada quien trace y recorte una de las letras de la figura 8.

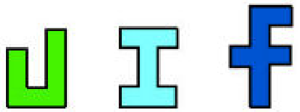


Figura 8

Emplea las letras de cartulina como plantilla y aplicando traslaciones, rotaciones o simetrías elabora un diseño como los de las figuras 7*a* y 7*b*.

3. Analiza el diseño del linóleo de la figura 9.


Figura 9

a) Explica qué transformaciones geométricas se usaron para crear este diseño.

______

b) Observa la figura 10 y realiza lo que se pide.

Con base en la figura 10, diseña mediante traslaciones y rotaciones un par de mosaicos. Dibújalos y muéstralos a tus compañeros.

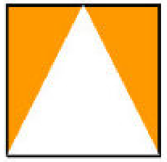


Figura 10

¿El tamaño de una figura cambia cuando se practica una rotación o una traslación? ______

Cuando se aplica una rotación o una traslación a una figura, ¿qué elementos geométricos cambian y cuáles no?

______

El mundo en un tablero

Para trazar figuras simétricas respecto a uno o dos ejes de simetría, visita la página: http://arquimedes.matem.unam.mx/lite/2013/1.4_RepositorioLITE/sistema/?q=node/4482 (Consulta: 21 de enero de 2017.)

Analiza en qué figuras encuentras traslaciones y en cuáles rotaciones. ______

Simetría axial y central

1. Termina el dibujo de la figura 11 considerando que la sección *B* tiene que ser simétrica a la sección *A* respecto al eje 1. La sección *C* debe ser simétrica a la sección *B* respecto al eje 2.

a) ¿Con qué transformación (traslación, rotación o simetría) es posible obtener la sección *C* de la figura 11 a partir de la sección *A*? ______

b) ¿Cuánto mide la distancia entre el eje 1 y el eje 2? ______ ¿Cuánto mide la

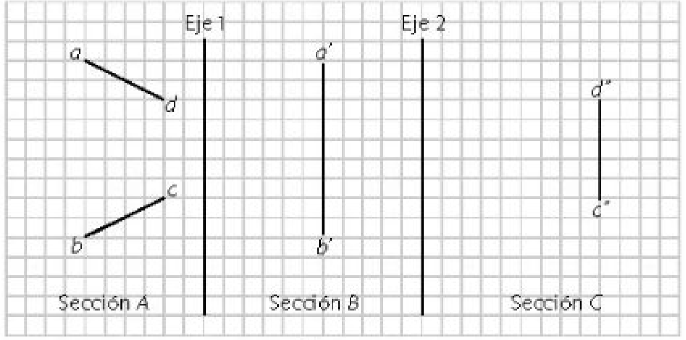


Figura 11

distancia entre los puntos c y c'? ______ ¿Cuántas veces es esa distancia respecto a la distancia que hay entre los ejes de simetría? ______

¿Los ejes 1 y 2 son simétricos entre sí? ______

2. En la figura 12 dibuja simétricamente el cuadrilátero de la parte II respecto al eje 2.

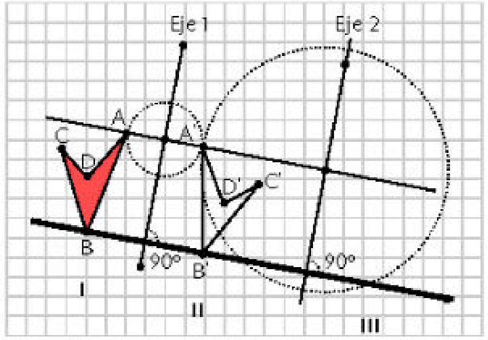


Figura 12

Cuando se hace la reflexión de una figura respecto a un eje de simetría y a continuación se hace una nueva reflexión a partir de otro eje de simetría (paralelo al primero), ¿la figura obtenida puede conseguirse directamente a partir de la figura original por medio de rotaciones y traslaciones? ______ Explica por qué. ______

______

¿La distancia entre cada uno de los puntos de la figura original y su correspondiente en la figura final siempre es el doble de la distancia entre los ejes? ______ ¿Por qué? ______

______

3. Completa la figura 13 de tal manera que la sección II sea simétrica a la sección I respecto al eje 1, y que la sección III sea simétrica a la sección II respecto al eje 2.

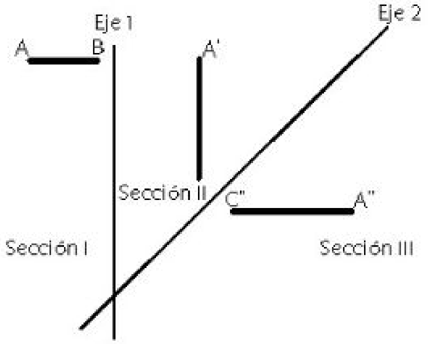


Figura 13

a) ¿Qué formas obtuviste? ______

¿Con qué transformación (traslación o rotación) se podría trazar directamente la sección III a partir de la sección I? ______

b) Si en la figura 13 se quiere hacer directamente la sección III con una rotación de la sección I, indica dónde deberá estar el centro de rotación. ¿El centro de rotación coincide con el punto de corte de los dos ejes de simetría? ______ ¿Por qué? ______

______

¿Cuánto mide el ángulo que se forma entre los dos ejes de simetría? ______
¿Cuánto mide el ángulo de rotación entre la sección I y la sección III? ______

4. Con piezas de colores, cuya forma es la de la pieza A de la figura 14, se formó el diseño *B*.

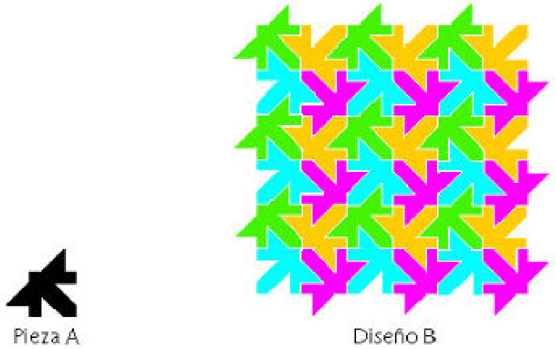


Figura 14

a) Analiza qué transformaciones geométricas (traslaciones, rotaciones, simetría) se usaron para obtenerlo. ______

b) En los polígonos *A* de las figuras 15 y 16 aplica las transformaciones necesarias para obtener el polígono *B* en cada caso. Utiliza un juego de geometría y deja claramente señalados los trazos que realizaste.

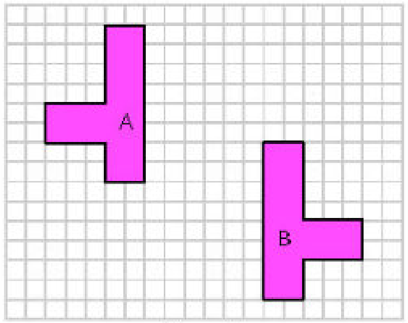


Figura 15

Describe las transformaciones geométricas que realizaste en la figura 15. ______

______

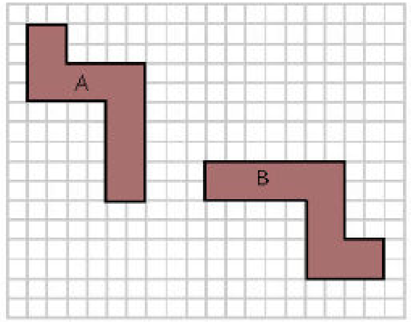


Figura 16

Describe las transformaciones geométricas que realizaste en la figura 16. ______________________________
____.

¿Si a una figura le aplicas primero una rotación y después una traslación se obtiene el mismo resultado que si primero aplicas una traslación y luego una rotación? ______. ¿Por qué? ____.
¿Y si aplicas una reflexión y después una traslación? ____________. ¿Por qué? ______
____.

El mundo en un tablero

A fin de hallar algunos usos de las transformaciones geométricas en el arte, visita la página de Escher http://www.uv.es/~buso/escher/index_es.html (Consulta: 9 de junio de 2013.)

Analiza qué transformaciones geométricas se utilizan para generar diseños como el de la figura 17.

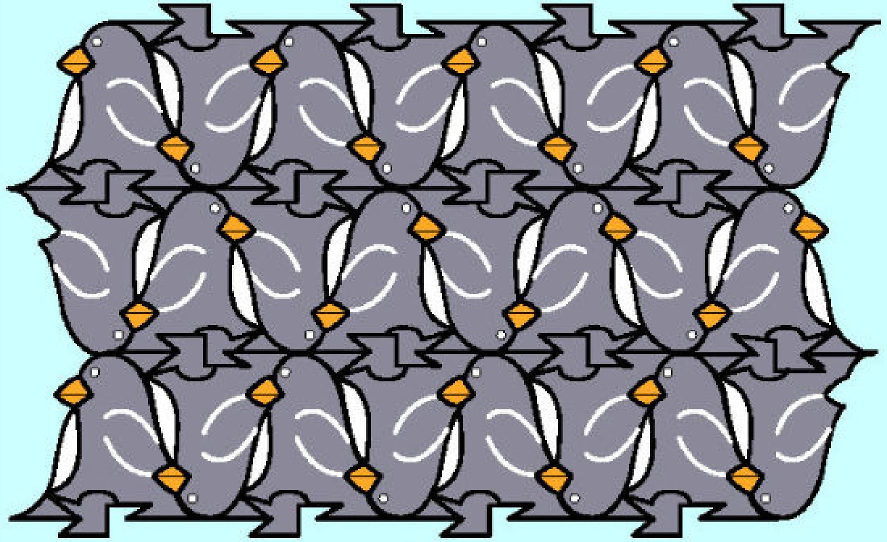


Figura 17

Haz un álbum de diseños donde se apliquen transformaciones geométricas.

Analicemos la partida

Por la blanda arena que lame el mar

a) En un pedazo de cartón haz una plantilla de un pie. Después usa esta plantilla para obtener un dibujo como el de la figura 18.

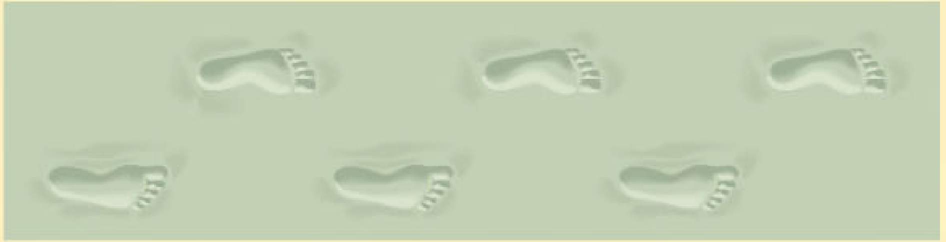


Figura 18

b) ¿Es posible hacer un rastro de tal modo que las huellas se puedan trazar por medio de rotaciones? Explica tu respuesta. __________. Si es posible hacerlo, trázalas.

c) ¿Es posible hacer un rastro de manera que las huellas se puedan trazar por medio de reflexiones? Explica por qué. __________. Si es posible, trázalas.

Comenta con tus compañeros en qué lugares se podrían encontrar traslaciones y ejes de simetría. ¿En qué suelen emplearse? ______________________________
____.

11. El teorema de Pitágoras

Contenido 2.4. Análisis de las relaciones entre las áreas de los cuadrados que se construyen sobre los lados de un triángulo rectángulo.

Jaque al rey

Pitágoras y su entrañable relación

En cada uno de los casos de la figura 1 se construyeron cuadrados o rectángulos (en amarillo y verde) alrededor de tres triángulos y un rectángulo (en azul).

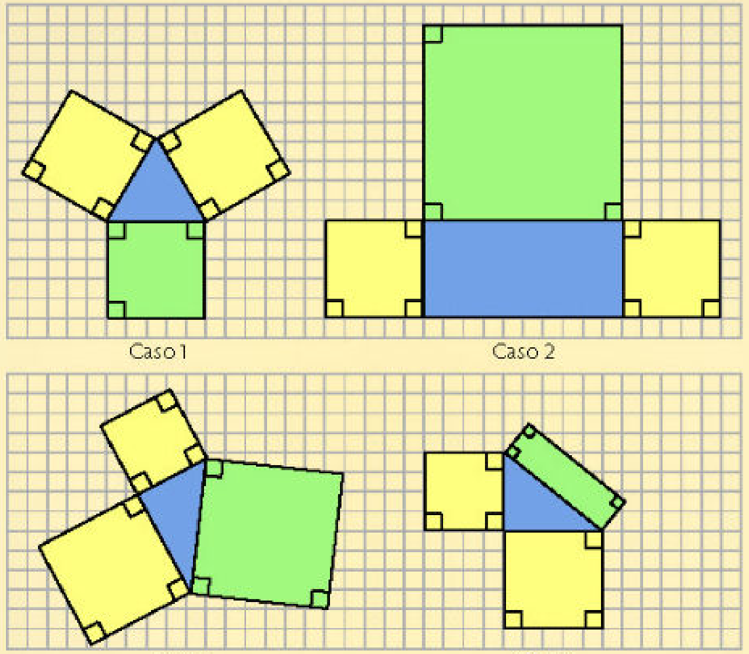


Figura 1

Al trazar los cuadrados y el rectángulo en torno a las figuras azules el propósito es identificar en qué casos existe una relación entre sus áreas.

Sin efectuar ninguna medición, ¿en cuál de los casos se puede afirmar que la suma del área de las figuras amarillas es igual al área de la figura verde? ________ Justifica tu respuesta. ________

¿Por qué en los otros casos no se da esta relación? ________

Apertura

▶ Teorema de Pitágoras

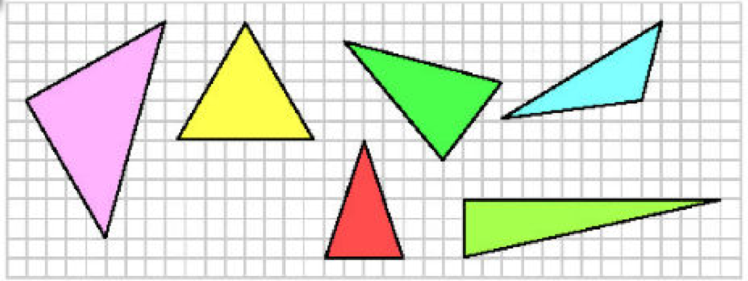


Figura 2

1. En la figura 2, identifica los triángulos que sean triángulos rectángulos (etiquétalos con TR) y tacha aquellos que no lo sean.

En parejas, recuerden qué es un triángulo rectángulo y escríbanlo. "Un triángulo rectángulo es... ________".

Si es necesario, utilicen un juego de geometría para verificar que, efectivamente, etiquetaron de manera correcta los triángulos de la figura 2.

¿Qué es un ángulo recto? ________ ¿Puede haber un triángulo rectángulo que, a su vez, sea un triángulo isósceles? ________. ¿Puede haber un triángulo rectángulo que sea equilátero? ________.

En los triángulos de la figura 2 que identificaste como triángulos rectángulos, remarca con color rojo los catetos y con azul la hipotenusa.

2. En equipos de cuatro alumnos, lleven a cabo la siguiente actividad para trazar rompecabezas con triángulos rectángulos.

a) En el centro de una cartulina, cada integrante debe trazar un triángulo con las medidas que se indican en la tabla 11.1. Investiguen si el suyo es un triángulo rectángulo y regístrenlo en la tabla 11.1.

Tabla 11.1. Triángulos para hacer un rompecabezas

Triángulo	Medidas de sus lados (cm)	¿Es triángulo rectángulo?
1	3, 4 y 5	
2	5, 12 y 13	
3	7, 24 y 25	
4	8, 15 y 17	

b) Si el triángulo que trazaron en el inciso *a* es un triángulo rectángulo, dibujen un cuadrado sobre cada uno de sus lados; la medida del lado del cuadrado debe ser igual a la medida del lado del triángulo sobre el que se va a trazar. Después cuadriculen los cuadrados como se ilustra en la figura 3.

c) En otro pedazo de cartulina tracen un cuadrado del tamaño de la hipotenusa del triángulo que les tocó. Cuadricúlenlo y recórtenlo (figura 4).

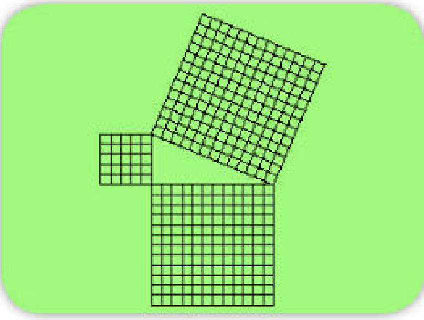


Figura 3

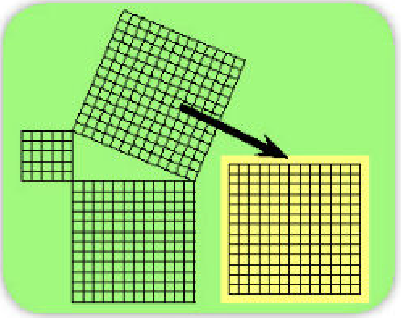


Figura 4

d) Recorten el cuadrado que obtuvieron en el inciso *c* haciendo el menor número de cortes de modo que cubran exactamente los dos cuadrados de los catetos en los triángulos trazados en la cartulina. En la figura 5 se muestra un ejemplo; tengan en mente hacer el menor número de cortes.

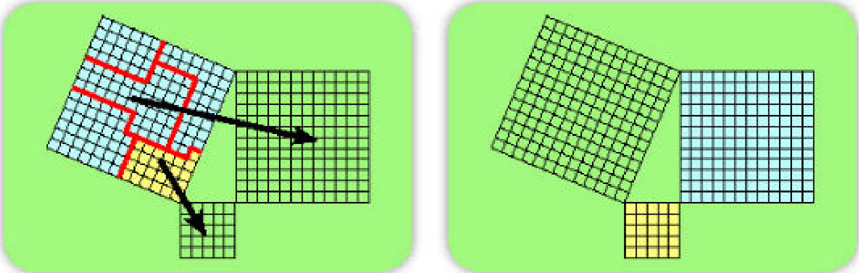


Figura 5

e) ¿Qué relación encontraron entre el área del cuadrado de mayor tamaño respecto a las áreas de los otros dos cuadrados? ______

Comparen sus respuestas con las de los compañeros de equipo y vean si las relaciones que hallaron se cumplen en todos los triángulos rectángulos que hicieron.

Analicen el triángulo de *ABC* de la figura 6 y respondan las preguntas.

¿Se cumple que el área del cuadrado mayor (anaranjado) es igual a la suma de las áreas de los cuadrados menores (amarillos)? ______. ¿Será posible construir un rompecabezas basado en la figura 6? ______. Si tu respuesta es afirmativa, reproduce en tu cuaderno la figura 6 y construye el rompecabezas.

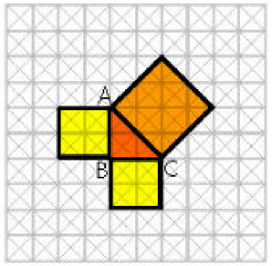


Figura 6

El mundo en un tablero

Con el propósito de que tengas más elementos para establecer la relación entre las áreas de los cuadrados formados en los lados de un triángulo rectángulo, busca en internet distintos rompecabezas (*puzzles*) pitagóricos como los de la figura 7.

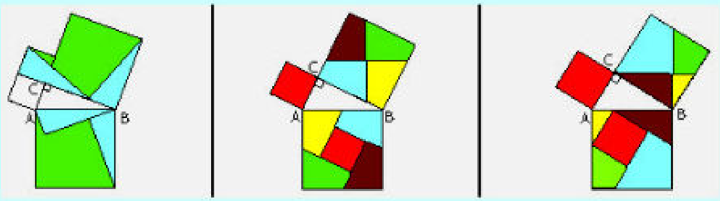


Figura 7

Puedes buscar ejemplos en la página http://roble.pntic.mec.es/jarran2/cabriweb/1triangulos/teoremapitagoras.htm (Consulta: 13 de junio de 2013.)

Reúnete con dos compañeros y escriban en cada caso un instructivo para poder reproducir los rompecabezas con distintas medidas de triángulos rectángulos. Expliquen a qué conclusión puede llegarse con cada uno de estos rompecabezas.

3. En tu cuaderno traza tres triángulos rectángulos de distintas medidas y completa la tabla 11.2. Puedes usar una calculadora para efectuar los cálculos que se requieran.

Tabla 11.2. Medidas de los lados de un triángulo rectángulo

Triángulo rectángulo	Medida de los lados de un triángulo rectángulo			Área de los cuadrados que se construyen a partir de las medidas de los lados			Suma de las áreas de los cuadrados menores
	Cateto *a*	Cateto *b*	Hipotenusa *h*	a^2	b^2	h^2	a^2+b^2
1							
2							
3							

a) ¿Qué relación existe entre la suma de las áreas de los cuadrados menores y el área del cuadrado mayor? ______

b) En tu cuaderno traza tres triángulos que no sean triángulos rectángulos de distintas medidas y completa la tabla 11.3. Usa una calculadora para hacer los cálculos que necesites.

Tabla 11.3. Medidas de los lados en triángulos que no son triángulos rectángulos

Triángulo	Medida de los lados del triángulo			Área de los cuadrados que se construyen a partir de las medidas de los lados			Suma de las áreas de los cuadrados menores
	Lado *a*	Lado *b*	Lado *h*	a^2	b^2	h^2	a^2+b^2
1							
2							
3							

c) ¿Qué relación existe entre la suma de las áreas de los cuadrados menores y el área del cuadrado mayor? ______

¿Qué cálculos se podrían hacer para saber si un triángulo es triángulo rectángulo a partir de la medida de sus lados? ______.

¿Un triángulo cuyos lados miden 9 cm, 40 cm y 41 cm es un triángulo rectángulo? ______. Escribe un procedimiento para contestar esta pregunta. ______

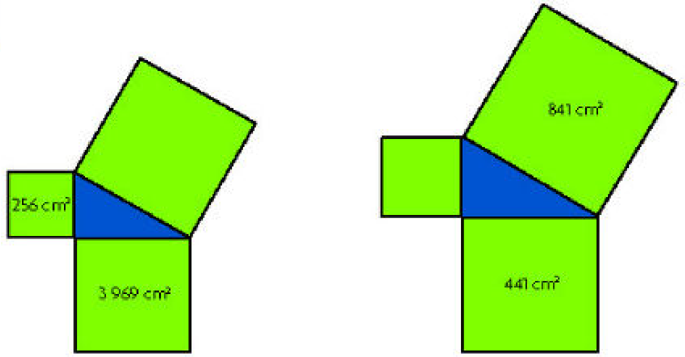
4. Resuelve los siguientes problemas.

a) En la tabla 11.4 se dan las medidas de los lados de varios triángulos. Determina con ellas si cada triángulo es un triángulo rectángulo e indícalo en la columna correspondiente. Justifica tus respuestas.

Tabla 11.4. Análisis para saber si un triángulo es triángulo rectángulo

Medida de los lados de un triángulo (cm)	Es un triángulo rectángulo	No es un triángulo rectángulo
11, 60, 61		
12, 35, 37		
13, 84, 85		

b) A partir de la información de la figura 8, calcula las áreas que faltan (cuadrados verdes) en los triángulos rectángulos 1 y 2.



Triángulo rectángulo 1   Triángulo rectángulo 2

Figura 8

- Área faltante en el triángulo rectángulo 1 = ______
- Área faltante en el triángulo rectángulo 2 = ______

¿Empleaste la relación entre los cuadrados de los lados de un triángulo rectángulo para resolver los problemas? ______ Si tu respuesta es afirmativa, explica cómo lo hiciste. ______

Justificaciones

1. En una hoja blanca dibuja y recorta cuatro triángulos rectángulos iguales. En cada uno señala con la misma literal los catetos iguales y con *h* la hipotenusa, como se muestra en la figura 9.

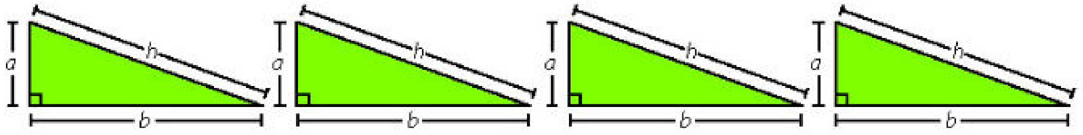


Figura 9

a) Traza en una cartulina un cuadrado de lado $a + b$ y coloca los cuatro triángulos rectángulos como se ilustra en la figura 10.

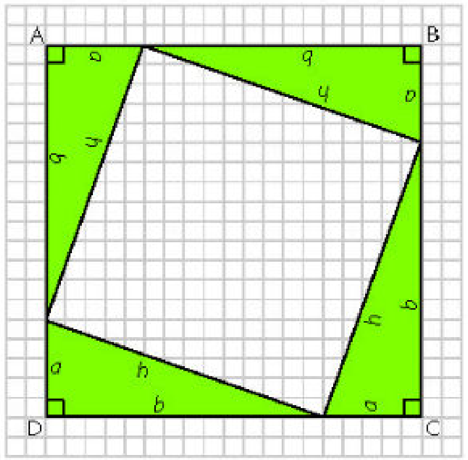


Figura 10

i) En la figura 10, ¿el polígono *ABCD* es un cuadrado? ______ ¿Por qué? ______

ii) En la figura 10, ¿la región blanca delimitada por los triángulos rectángulos es un cuadrado? ______ Justifica tu respuesta. ______

¿Cómo puede expresarse algebraicamente el área de la región blanca? ______

b) Traza en una cartulina el cuadrado *ABCD*. Dentro de este cuadrado organiza los cuatro triángulos rectángulos como en la figura 11.

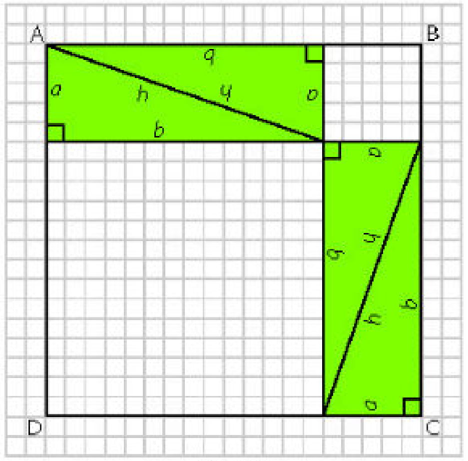


Figura 11

¿Las regiones en blanco dentro de *ABCD* son cuadrados? ______ Justifica tu respuesta. ______ ¿Cómo se puede expresar algebraicamente el área de cada uno de estos cuadrados? ______

c) ¿Las dos regiones en blanco de las figuras 10 y 11 tienen la misma área? ______ ¿Por qué? ______

Si las regiones en blanco tienen la misma área, expresa de manera algebraica esta igualdad. ______

¿Consideras que en esta actividad se justifica el teorema de Pitágoras que afirma: "En un triángulo rectángulo la suma de los cuadrados de las longitudes de sus catetos es igual al cuadrado de la longitud de la hipotenusa"? ______ Explica tu respuesta. ______

El mundo en un tablero

Para mejorar tus habilidades de argumentación, visita la página: http://www.disfrutalasmatematicas.com/geometria/teorema-pitagoras-demo.html y analiza la demostración que se da del teorema de Pitágoras. (Consulta: 22 de junio de 2013.)

Compara esta demostración con la que acabas de realizar en la actividad 1. ¿Qué elementos pueden enriquecer la justificación que hiciste del teorema de Pitágoras? ______

2. Emplea los mismos cuatro triángulos rectángulos que recortaste en la actividad 1 del apartado "Justificaciones", para acomodarlos como en la figura 12.

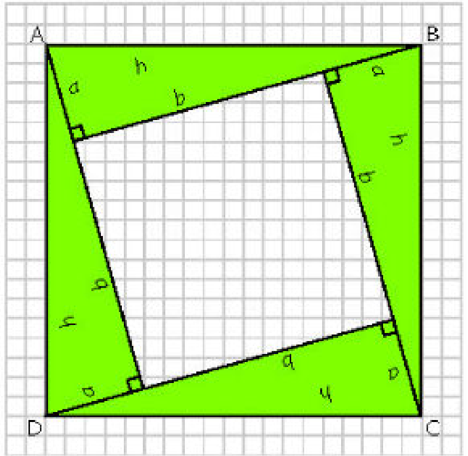


Figura 12

a) En la figura 12, ¿el polígono *ABCD* es un cuadrado? ______ ¿Por qué? ______

b) Con base en la figura 12, completa los espacios en blanco de los siguientes enunciados:

- El lado del cuadrado *ABCD* mide ______, de manera que su área puede expresarse como ______.
- El área del cuadrado *ABCD* corresponde con el cuadrado de la hipotenusa del ______.

c) La figura que se forma en el centro de *ABCD* es un cuadrado. ______ ¿Por qué? ______

Expresa de manera algebraica el área de dicho cuadrado. ______

d) Expresa algebraicamente la suma del área de los cuatro triángulos rectángulos. ______

Con base en esta expresión, escribe de manera algebraica la suma de las áreas de las cinco figuras que forman el cuadrado *ABCD*. ______________________

e) Iguala las expresiones para el área de *ABCD* obtenida en los incisos *b* y *d*. Desarrolla y simplifica los términos de la igualdad. ¿El resultado obtenido demuestra el teorema de Pitágoras? ______ ¿Por qué? ______________________

Compara las justificaciones del teorema de Pitágoras que construiste en las actividades 1 y 2. ¿Cuál de las dos consideras más clara? ____________ Explica por qué. ______________________

En equipo, retomen alguna de las justificaciones y escríbanla con sus propias palabras.

Analicemos la partida

Pitágoras y su entrañable relación

En parejas, retomen la actividad de "Jaque al rey".

a) De los cuatro casos que se propusieron en la figura 1, ¿en cuáles las figuras azules son triángulos rectángulos? ______________________

b) En los casos en que las figuras azules son triángulos rectángulos, ¿se construyeron cuadrados a partir de las medidas de sus catetos y de su hipotenusa? ______ ¿Las características de las figuras de este caso son suficientes para asegurar que la suma del área de las figuras amarillas es igual al área de la figura verde? ______ ¿Por qué? ______________________

Escriban el teorema de Pitágoras: ______________________

Si en lugar de construir cuadrados sobre los catetos del triángulo rectángulo, se construyen otras figuras (por ejemplo, triángulos equiláteros), ¿se sigue cumpliendo que la suma de las áreas de las figuras construidas en los catetos es igual al área de la figura construida en la hipotenusa? Prueben trazando distintos casos en su cuaderno y contesten la pregunta. ______________________

12. Explicitación y uso del teorema de Pitágoras

Contenido 2.6. Explicitación y uso del teorema de Pitágoras.

Jaque al rey

Un sitio tranquilo para madurar

En una bodega de vino las barricas normalmente se apilan como se ilustra en la figura 1.

El sótano donde se guardan las barricas de una compañía vinícola tiene un piso irregular, de tal manera que en algunas partes la altura permite apilar hasta cinco niveles de barricas y en otras no existe la certeza de tener suficiente espacio para tantos niveles.

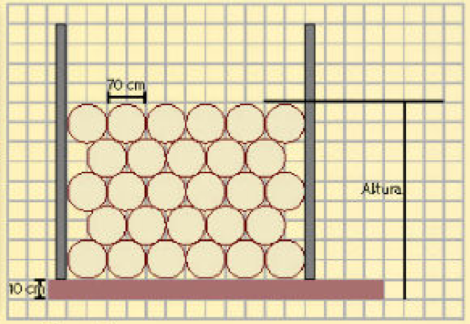


Figura 1

Debe tenerse en cuenta que, por su peso y por el reposo que el vino debe guardar, es complicado subir una barrica y encontrar que no hay espacio para ella. Por tanto, se necesita saber la altura que alcanzará una pila de cinco barricas y compararla con las diferentes alturas que tiene el sótano.

¿Cuál es la altura máxima que alcanzan los cinco niveles de barricas si éstas tienen un diámetro de 70 cm en su panza, es decir, en su parte más ancha? ______________________

Considera que se asientan sobre un soporte recto de 10 cm de altura.

Apertura

Teorema de Pitágoras

1. En todo triángulo rectángulo existe una relación entre el área del cuadrado construido sobre la hipotenusa y la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos. ¿Cuál es esta relación? ______________________

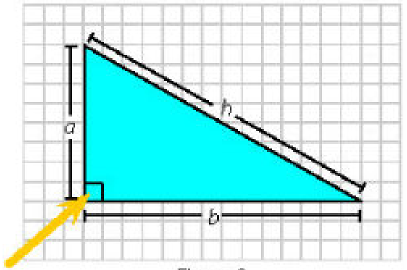


Figura 2

a) Analiza la figura 2.

i) ¿Qué representa el símbolo del triángulo que se ha señalado con una flecha amarilla? ______.

ii) ¿Qué representa la letra *a*? ______. ¿Y la letra *b*? ______.

¿Qué representa la letra *h*? ______.

b) En la figura 3 encuentra una expresión algebraica para cada una de las áreas de los cuadrados que se construyeron sobre los lados del triángulo rectángulo.

Escribe las expresiones en las líneas de los cuadrados correspondientes.

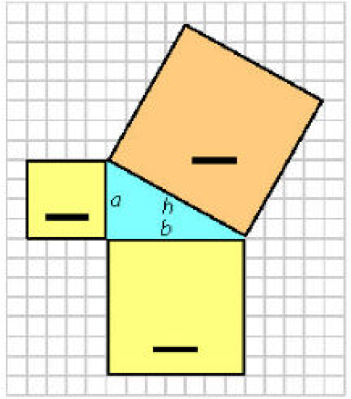


Figura 3

El hecho de que la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos sea igual al área del cuadrado construido sobre la hipotenusa se puede expresar de la siguiente forma:

______ + ______ = ______

A esta relación se le conoce como teorema de Pitágoras.

El mundo en un tablero

Para conocer más acerca de Pitágoras y su teorema, visita el sitio http://www.ceibal.edu.uy/UserFiles/P0001/ODEA/ORIGINAL/111107_teorema_pitagoras.elp/pitgoras_mucho_ms_que_un_teorema.html (Consulta: 21 de enero de 2017.)

¿Cómo usaron los egipcios el teorema de Pitágoras para trazar ángulos rectos y poder medir la tierra inundada por el Nilo? ______.
¿Qué son las ternas pitagóricas? ______.
¿Qué es lo que más le llamó la atención de la vida de Pitágoras? ______
______.

2. Reúnete con dos compañeros y lleven a cabo la siguiente actividad.

a) Un equipo de acróbatas en bicicleta le encarga a un herrero una rampa como la que se ve en la figura 4. La superficie es de madera y lleva un guardapolvo de caucho para evitar que los ciclistas se atoren al subir la rampa.

Figura 4

i) Si el herrero dispone de 30 m de perfil de acero para la estructura, ¿le alcanzará el material para construirla? ______.

ii) ¿Qué información es necesario conocer para responder la pregunta anterior?
______
______.

b) Cada quien tiene que hacer un diseño de la rampa con las medidas que considere pertinentes. Su diseño debe ser independiente del material necesario para construir la rampa.

c) Muestren sus diseños de rampa a los otros compañeros y en cada caso revisen que las medidas de la estructura estén correctamente calculadas.

¿Fue necesario usar el teorema de Pitágoras en la actividad anterior? ______. Si su respuesta es afirmativa, detallen con qué propósito lo emplearon. ______
______.

3. En la figura 5 se muestra la longitud de la escalera de un camión de bomberos sin que se haya desplegado.

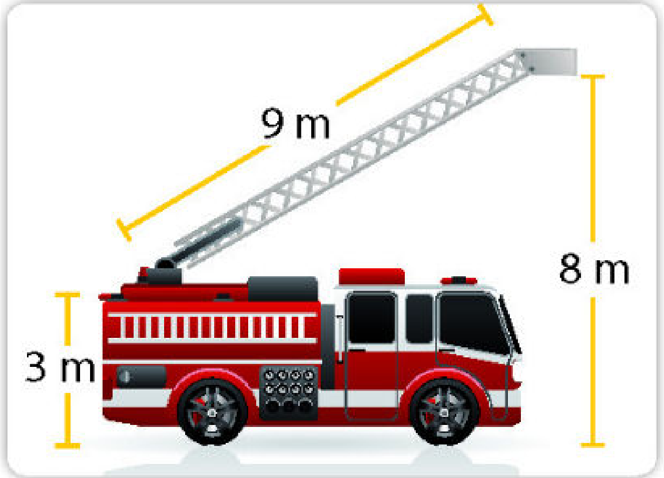


Figura 5

a) Si la ventana de un edificio por la que debe entrar un bombero está a 8 m de altura, ¿cómo podría determinarse a qué distancia del edificio tiene que colocarse la base de la escalera? ______

b) En la figura 6 se muestra el diseño de una manija de aluminio.

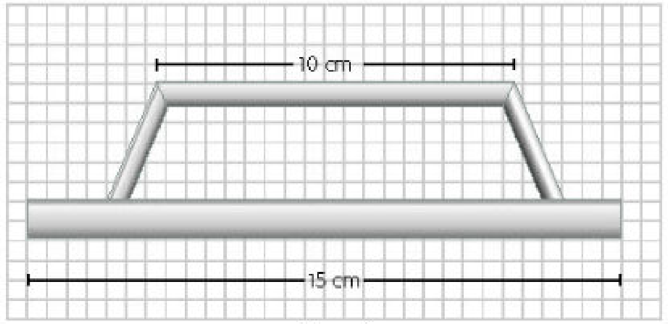


Figura 6

Utiliza la cuadrícula para determinar la longitud total de aluminio que se necesita para hacer la manija. ______

c) En la figura 7 se observa un cubo de 5 cm de arista. ¿Cuánto mide el segmento que va del vértice E al vértice C? ______ Justifica tu respuesta. ______

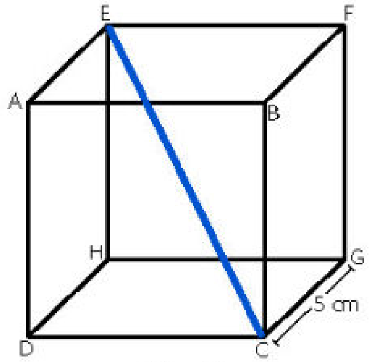


Figura 7

d) Determina la altura del silo de la figura 8.

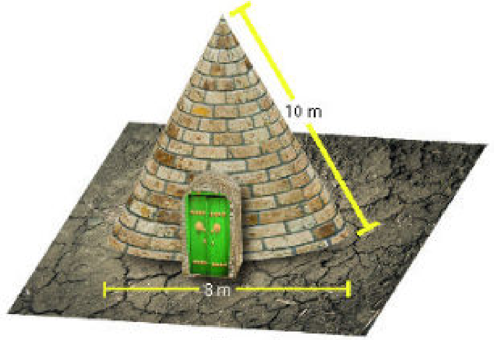


Figura 8

Reúnete con dos compañeros y comenten el procedimiento que siguieron para resolver cada uno de los problemas anteriores; revisen que los resultados sean correctos. Si encuentran un resultado incorrecto analicen cuál es la fuente del error.

Analicemos la partida

Un sitio tranquilo para madurar

En la figura 8 se ha dibujado un apilamiento de barricas menor a cinco niveles. En parejas, analicen la situación y contesten las preguntas que se plantean.

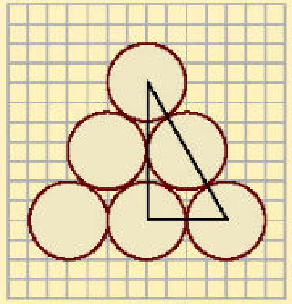


Figura 8

a) ¿Cuántos niveles alcanzan estas barricas? ______

b) ¿El triángulo que se ha dibujado con los centros de las barricas es un triángulo rectángulo? ______ ¿Por qué? ______

c) Si se conoce el diámetro de las barricas, ¿es posible saber cuánto mide cada uno de los lados del triángulo? ______ Expliquen su respuesta. ______

d) Con estas ideas regresen al problema de la sección "Jaque al rey", resuélvanlo juntos y verifiquen que el resultado que habían encontrado sea correcto.

¿De qué modo se relaciona el problema que resolvieron en esta sección con el problema original? ______

Expliquen las ventajas o desventajas que, en matemáticas, tiene resolver un problema a partir de una versión más simplificada de éste. ______

13. La regla de la suma

Contenido 2.6. Cálculo de la probabilidad de ocurrencia de dos eventos mutuamente excluyentes y de eventos complementarios (regla de la suma).

Jaque al rey

La estrategia ganadora

En una urna hay una gran cantidad de esferas blancas, amarillas, verdes y azules (figura 1). Cada vez que se extrae una esfera se devuelve a la urna y las esferas se mezclan nuevamente.

Simón y Andréi participan en el sorteo y saben que la probabilidad de extraer una esfera blanca es $\frac{4}{10}$, la de extraer una esfera amarilla es $\frac{1}{5}$ y la probabilidad de extraer una verde es 0.25. Para aumentar sus posibilidades de ganar, deciden participar juntos.

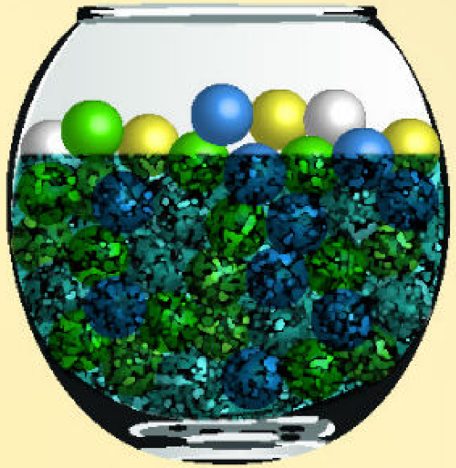


Figura 1

Si juegan a que Simón saque esfera amarilla y Andréi esfera verde, ¿cuál es la probabilidad que tienen de ganar? ______

Si juegan a que Simón saque esfera blanca o que Andréi obtenga esfera amarilla, ¿cuál es la probabilidad de que ganen? ______

Si juegan a que por lo menos uno de los dos obtenga esfera azul, ¿cuál es la probabilidad de ganar?

______

¿En qué caso o en qué casos se suman las probabilidades de Simón y Andréi? ______.

Explica por qué. ______.

Apertura

▶ La regla de la suma

1. En parejas, lleven a cabo esta actividad y respondan las preguntas.

En una feria, Yésica decide jugar en una ruleta como la de la figura 2. El juego consiste en presentar a los jugadores varias tarjetas de las que debe escogerse una, después se hace girar la ruleta y si el resultado coincide con el de la tarjeta, el jugador gana.

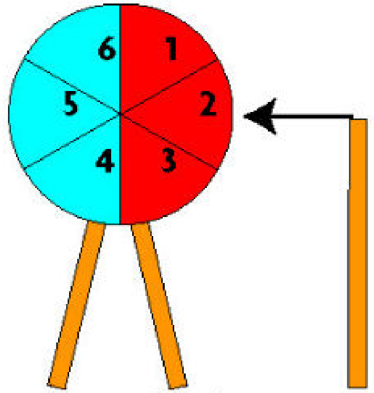


Figura 2

a) En el primer intento se puede elegir entre las tarjetas de la figura 3.

Cae en rojo	Cae en azul
Cae en rojo o azul	Cae en rojo y azul

Figura 3

¿Qué tarjeta le conviene elegir a Yésica? ______.
¿Por qué? ______

b) Cada una de las tarjetas de la figura 3 presenta un evento:

- Evento A: "Que la ruleta se detenga en la región en rojo".
- Evento B: "Que la ruleta se detenga en la región en azul".
- Evento C: "Que la ruleta se detenga en la región en rojo o en azul".
- Evento D: "Que la ruleta se detenga en la región en rojo y en azul".

i) Determinen la probabilidad de que ocurra cada uno de los eventos anteriores:
P(A) = ______. P(B) = ______. P(C) = ______. P(D) = ______.

ii) ¿Qué significa que ocurra A o que ocurra B? ______
______. ¿Es éste un nuevo evento? ______.

iii) ¿Cuáles de los eventos anteriores (A, B, C y D) son mutuamente excluyentes?
______

iv) ¿Cómo puede calcularse la probabilidad de que ocurra A o de que ocurra B?
______. Determinen P(A o B) = ______.

c) En el segundo intento se puede elegir entre las tarjetas de la figura 4.

Cae en el número 5	Cae en un número menor que 3	Cae en un número par

Figura 4

¿Qué tarjeta le conviene elegir a Yésica? ________ ¿Por qué? ____________________

____

d) Cada una de las tarjetas de la figura 4 presenta un evento:

- Evento A: "Que la ruleta se detenga en el número 5".
- Evento B: "Que la ruleta se detenga en un número menor que 3".
- Evento C: "Que la ruleta se detenga en un número par".

i) Determinen la probabilidad de que ocurra cada uno de los eventos anteriores:

P(A) = ____________ P(B) = ____________ P(C) = ____________

ii) ¿Cuáles de los eventos (A, B y C) son mutuamente excluyentes? ____________

iii) Encuentren.

P(A o B) = ________ P(B o C) = ________ P(A o C) = ________

e) En el tercer intento se debe elegir entre las tarjetas de la figura 5.

Cae en rojo y es número par	Cae en rojo o es número par	Cae en azul y es menor que 5	Cae en azul o es menor que 5

Figura 4

f) ¿Qué tarjeta conviene elegir? ________ Hagan un análisis de probabilidades para justificar su respuesta. ________

¿Qué diferencia existe entre usar los conectivos "o" e "y"? Por ejemplo, en las tarjetas: "Cae en rojo y es un número par" y "Cae en rojo o es un número par". ____________

____

¿Cómo calcularon la probabilidad del evento "Cae en rojo y es número par"? ____________

____

¿Cómo calcularon la probabilidad del evento "Cae en rojo o es número par"? ____________

____

¿Cuáles de los eventos anteriores son mutuamente excluyentes? Justifiquen su respuesta.

2. En equipos de dos o tres alumnos, analicen las situaciones presentadas en cada inciso y contesten las preguntas.

a) Observen las flores de papel de la figura 6.

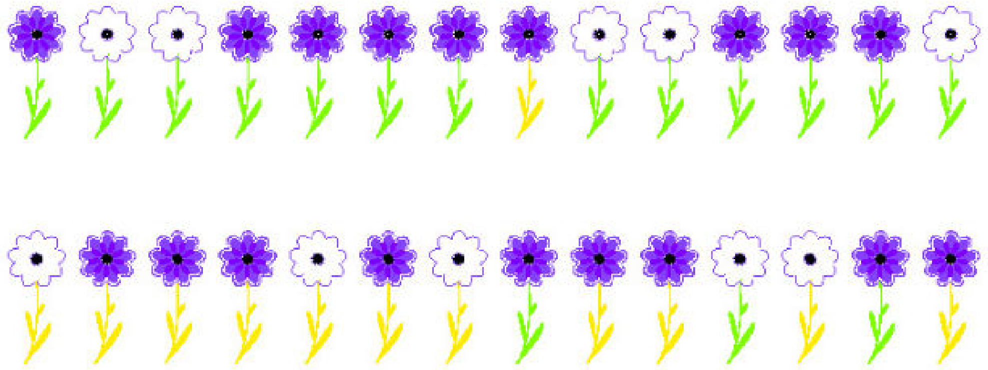


Figura 6

i) ¿Cuál es la probabilidad de seleccionar al azar una flor de papel con pedúnculo verde? ____________

ii) ¿Cuál es la probabilidad de seleccionar al azar una flor con corola morada?

____

iii) ¿Cuál es la probabilidad de seleccionar una flor de papel que tenga pedúnculo verde o que tenga corola morada? ____________

b) Se lanzan dos dados y se suman los puntos que caen.

i) ¿Cuál es la probabilidad de obtener un total de 12 puntos? ____________

ii) ¿Cuál es la probabilidad de obtener un total de 7 puntos? ____________

iii) ¿Cuál es la probabilidad de obtener 7 o 12 puntos? ____________

iv) ¿La probabilidad de obtener 1, 2 o 3 es la misma probabilidad que obtener 4, 5 o 6? ________. Expliquen por qué. ________

c) En una bolsa se tiene cierta cantidad de estrellas como las de la figura 7.

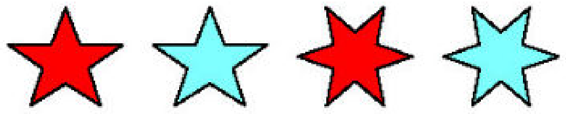


Figura 7

Se sabe que:

- La probabilidad de obtener una estrella de cinco picos es $\frac{13}{29}$.
- La probabilidad de obtener una estrella de color azul de $\frac{12}{29}$.
- La probabilidad de obtener una estrella de cinco picos azul es $\frac{5}{29}$.

¿Cuál es la probabilidad de obtener una estrella de cinco picos o bien una estrella azul? ________. Explica tu procedimiento. ____________

____

Analicen los enunciados y anoten en los recuadros una V si son verdaderos y una F si son falsos.

- Cuando dos eventos pueden ocurrir al mismo tiempo, se dice que son mutuamente excluyentes. ☐
- Cuando dos eventos son mutuamente excluyentes, la probabilidad de que ocurra por lo menos uno de ellos se obtiene sumando las probabilidades de cada evento. ☐
- Cuando dos eventos no son mutuamente excluyentes, la probabilidad de que ocurra uno o de que ocurra otro se obtiene sumando las probabilidades de cada evento y restando la probabilidad de que ocurran al mismo tiempo. ☐
- La suma de las probabilidades de dos eventos complementarios es igual a 1. ☐
- La probabilidad de que suceda un evento A o un evento B, P(A o B), está dada por la ecuación: P(A o B) = P(A) + P(B) − P(A y B). ☐

El mundo en un tablero

Con el propósito de que cuentes con mayor información sobre la regla de la suma o de la adición, visita el sitio http://namathis.com/tema.php?videoid=3cQVjswyPj0ltema=probabilidad-y-estadistica-regla-de-adicion-probabilidad (Consulta: 14 de junio de 2013.)

Reúnete con otros compañeros y comenten qué entendieron del video y qué relación tiene con lo estudiado en esta lección.

Analicemos la partida

La estrategia ganadora

En parejas, retomen el problema de la sección "Jaque al rey". Las probabilidades de extraer las esferas de la urna son las siguientes:

- Probabilidad de extraer una esfera blanca: $\frac{4}{10}$.
- Probabilidad de obtener una esfera amarilla: $\frac{1}{5}$.
- Probabilidad de obtener una esfera verde: 0.25.

a) Indiquen cómo se calcula la probabilidad de extraer una esfera o esferas en cada caso y calcúlenla.

i) Azul o amarilla o blanca: ____________________.

ii) Blanca o amarilla: ____________________.

iii) Amarilla y verde: ____________________.

iv) Azul: ____________________.

b) Cuando Simón y Andréi deciden jugar juntos, ¿qué elección de esferas les da la mayor posibilidad de ganar? ________. Justifiquen su respuesta. ____________________.

Comenten con otra pareja cómo es posible reconocer las situaciones en las que conviene emplear la regla de la suma. Escriban un ejemplo. ____________________.

Trátenlo con mucho cuidado

SITUACIÓN 1

En la figura 1 se muestran las dimensiones de la caja de una *pick-up*.

Figura 1

Lorenzo quiere transportar en su camioneta un mueble antiguo y, para evitar que se maltrate, debe asentarlo completamente en la base de la caja. La antigüedad mide 30 cm de ancho, 30 cm de profundidad y 1.90 m de largo. ¿Podrá llevarlo en la caja de la *pick-up*? Justifica tu respuesta.

Crédito total: Da la respuesta correcta.
Crédito parcial: Su estrategia es correcta, pero comete un error en alguna de las operaciones involucradas, por ejemplo, equivocarse en una suma.
Sin crédito: La estrategia usada es incorrecta o comete más de un error en las operaciones involucradas. Por ejemplo, resuelve el problema de manera extramatemática.

Led-Ok

SITUACIÓN 2

Se quiere hacer un cartel (figura 2) para la tienda de ropa *OK* con las siguientes dimensiones:

Figura 2

Las letras estarán trazadas con cable de luces LED. ¿Cuántos metros de cable hay que comprar?

Crédito total: Da la respuesta correcta.
Crédito parcial: Su estrategia es correcta, pero comete un error en alguna de las operaciones involucradas, por ejemplo, comete un error al sumar.
Sin crédito: La estrategia usada es incorrecta o comete más de un error en las operaciones involucradas.

Un paseíto por el parque

SITUACIÓN 3

En la figura 3 se muestra el circuito de un parque.

¿Aproximadamente cuánto tiempo tardará una persona en recorrer el circuito caminando?

a) 12 minutos
b) 40 minutos
c) 60 minutos
d) 170 minutos
e) 240 minutos

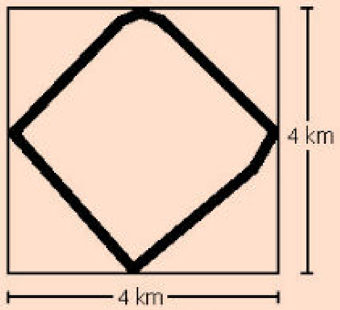


Figura 3

Crédito total: Da la respuesta correcta.
Crédito parcial: Estima mal la velocidad a la que camina una persona, pero el planteamiento es correcto.
Sin crédito: Proporciona una respuesta incorrecta.

Un mundo al revés

SITUACIÓN 4

En la figura 4 se muestra el diseño de un tapete.

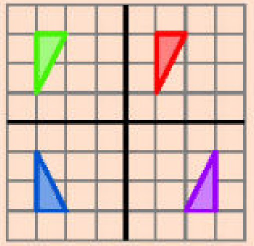


Figura 4

Pregunta 1: ¿Qué transformación (reflexión, rotación o traslación) debe hacerse al triángulo verde para obtener el triángulo rojo? Indícala con líneas punteadas en el dibujo original. ¿Qué cambio sufrieron los ángulos correspondientes del triángulo rojo?

Crédito total: Da la respuesta correcta, tanto para el tipo de transformación como para su representación con líneas punteadas. Identifica qué propiedad se conserva en la transformación aplicada.
Crédito parcial: Se equivoca en el nombre o en la representación con líneas punteadas.
Sin crédito: Proporciona una respuesta incorrecta.

Pregunta 2: ¿Qué transformación o transformaciones deben aplicarse al triángulo verde para obtener el triángulo morado? Indícalas con líneas punteadas en el dibujo original. ¿Cómo son los lados correspondientes de ambos triángulos?

Crédito total: Da la respuesta correcta, tanto para el tipo de transformación como para su representación con líneas punteadas. Identifica qué propiedad se conserva en la transformación aplicada.
Crédito parcial: Se equivoca en el nombre o en la representación con líneas punteadas.
Sin crédito: Proporciona una respuesta incorrecta.

Pregunta 3: ¿Qué transformación debe hacerse para que, a partir del triángulo verde, se obtenga el triángulo azul? Indícala con líneas punteadas en el dibujo original.

Crédito total: Da la respuesta correcta, tanto para el tipo de transformación como para su representación con líneas punteadas.
Crédito parcial: Se equivoca en el nombre o en la representación con líneas punteadas.
Sin crédito: Proporciona una respuesta incorrecta.

Pregunta 4: ¿Qué transformación debe aplicarse al triángulo rojo para obtener el triángulo morado? Indícala con líneas punteadas en el dibujo original.

Crédito total: Da la respuesta correcta, tanto para el tipo de transformación como para su representación con líneas punteadas.
Crédito parcial: Se equivoca en el nombre o en la representación con líneas punteadas.
Sin crédito: Proporciona una respuesta incorrecta.

Pregunta 5: Si ahora el triángulo original es el que se muestra en la figura 5, realiza las mismas transformaciones que las del tapete original para encontrar los tres triángulos que faltan.

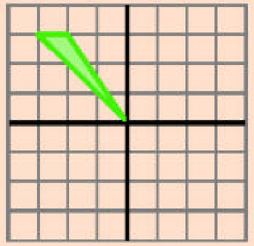


Figura 5

Crédito total: Realiza las tres transformaciones correctamente.
Crédito parcial: Se equivoca en una de las transformaciones.
Sin crédito: Se equivoca en más de una de las transformaciones.

Pregunta 6: ¿Podría ser el triángulo rojo de la figura 6 una transformación del verde? Justifica tu respuesta.

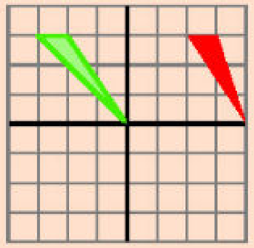


Figura 6

Crédito total: Da la respuesta y el argumento correcto, haciendo hincapié en las propiedades que se conservan en una transformación.
Crédito parcial: Da argumentos incorrectos o incompletos.

Bloque 3

Aprendizajes esperados:

- Resuelve problemas que implican el uso de ecuaciones de segundo grado.
- Resuelve problemas de congruencia y semejanza que implican utilizar estas propiedades en triángulos o en cualquier figura.

Competencias que se favorecen:

Resolver problemas de manera autónoma.
Comunicar información matemática.
Validar procedimientos y resultados.
Manejar técnicas eficientemente.

El valor de las divisas depende de variables económicas, políticas e incluso ambientales. Las gráficas son un instrumento útil para apreciar y reconocer tendencias en el cambio de valor.

Euros sobre una gráfica de finanzas

14. La fórmula general para resolver ecuaciones cuadráticas

Contenido 3.1. Resolución de problemas que implican el uso de ecuaciones cuadráticas. Aplicación de la fórmula general para resolver dichas ecuaciones

Jaque al rey

¡Y qué mejor que hortalizas frescas!

Edith tiene un terreno a las afueras de la ciudad y ha decidido utilizarlo como huerta; las dimensiones tanto del terreno como de la huerta se muestran en la figura 1.

Para desplazarse por los andadores que rodean la huerta con las herramientas y los materiales necesarios para la labranza, piensa comprar una carretilla. En la tienda vio el modelo Sembradío, que mide 1.35 m de ancho, y el modelo Barbecho, cuya anchura es de 2.50 m y tiene mayor capacidad.

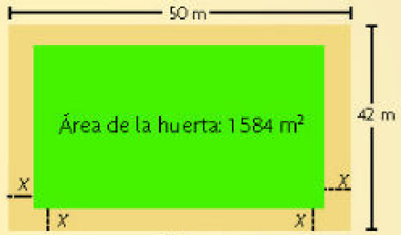


Figura 1

¿Cuánto miden los lados del rectángulo que corresponde al área de la huerta? __________
¿Cuánto mide x? __________
¿Qué modelo de carretilla le conviene comprar? __________
Justifica tu respuesta. __________

Apertura

▶ Resolución de problemas que involucran ecuaciones cuadráticas

1. ¿Cuáles son las medidas de los lados de los rectángulos en la figura 2? __________

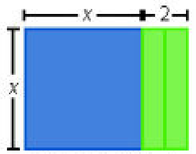
a) Escribe la ecuación que representa el área total de la figura 2. __________

b) ¿Qué soluciones encontraste en la ecuación planteada en el inciso *a*?

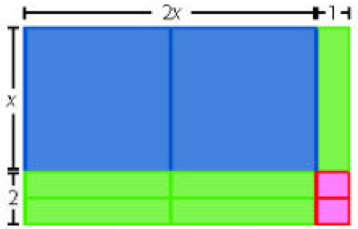
$x_1 =$ __________ $x_2 =$ __________

c) Medidas de los lados de la figura 2: __________ y __________

d) ¿Con qué procedimiento lo resolviste? __________



Área total: 35 u²
Figura 2



Área total: 14 u²
Figura 3

e) Escribe la ecuación que representa el área total de la figura 3.
____

f) ¿Qué soluciones encontraste en la ecuación planteada en el inciso *e*?

x_1 = ____________ x_2 = ____________

g) Medidas de los lados de la figura 3: ____________ y ____________.

h) ¿Con qué procedimiento lo resolviste? ____________
____

En parejas, comparen sus soluciones y comenten cómo las obtuvieron. Por ejemplo, ¿la ecuación a la que llegaron en el inciso *e* es $2x^2 + 5x - 12 = 0$? ________. ¿Se puede resolver por factorización? Expliquen por qué. ____________

Comenten por qué una de las soluciones de la ecuación no tiene sentido para dar respuesta al problema.

2. En equipos de tres alumnos, encuentren cuál es el número que pensó Sofía.

"Pienso un número, lo elevo al cuadrado y lo que obtengo lo multiplico por 2. A este resultado le sumo 8 veces el número pensado. Al final, el resultado que me da es 4.5."

a) Escriban la ecuación que modela este problema. ____________

b) Hay dos números que pudo haber pensado Sofía: x_1 = ________. x_2 = ________.

c) ¿Con qué procedimiento encontraron uno o los dos números? ____________
____

3. ¿Cómo completarías la tabla 14.1 para hallar o aproximarte a los dos números que pudo haber pensado Sofía?

Tabla 14.1. Valores que permiten aproximarse o hallar los números que pensó Sofía

x	x^2	____ · 2	____ + 8x
5			
3			
1			
0.5			
−1			

a) ¿Alguno de los números que pensó Sofía es mayor que 1? ____________. Justifica tu respuesta. ____________
____

b) ¿Alguno de los números que pensó tiene signo negativo? ____________. Si tu respuesta es afirmativa, ¿entre qué números enteros se encuentra? ____________
____

Fórmula general para resolver ecuaciones cuadráticas

La fórmula para resolver ecuaciones cuadráticas es útil cuando la factorización no es sencilla o bien se dificulta hacer operaciones inversas debido a los números involucrados; la fórmula se llama *fórmula general para resolver ecuaciones cuadráticas* o, simplemente, *fórmula general*.

Para utilizarla, la ecuación debe escribirse en su forma general, o sea: $ax^2 + bx + c = 0$. La fórmula es la siguiente:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

En la fórmula, *c* es el término independiente, y los coeficientes *a* y *b* se identifican así:

a	*b*	*c*
Coeficiente del término de segundo grado	Coeficiente del término de primer grado	Término independiente

El valor del coeficiente *a* debe ser distinto de 0.

Las ecuaciones cuadráticas pueden tener una o dos soluciones; también puede ocurrir que no tengan ninguna solución. Usando la fórmula general es posible hallar estas soluciones.

En el numerador hay un signo ± que indica la existencia de dos soluciones: una de ellas se obtendrá sumando y la otra restando, como se muestra abajo. Cuando la ecuación tiene una solución, se obtendrá el mismo número en ambos casos.

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

4. Encuentra los dos números que pudo haber pensado Sofía utilizando la fórmula general.

a) Escribe la ecuación en su forma general: ____________

b) Identifica los coeficientes y el término independiente, y escríbelos en el recuadro conservando el signo que tienen en la ecuación.

a	*b*	*c*

Escríbelos en la fórmula general y resuelve:

$$x = \frac{-\_\_\_ \pm \sqrt{\_\_\_^2 - 4(\_\_\_)(\_\_\_)}}{2(\_\_\_)} \qquad x = \frac{-\_\_\_ \pm \sqrt{64 + 36}}{\_\_\_} \qquad x = \frac{-\_\_\_ \pm 10}{\_\_\_}$$

$$x_1 = \frac{-\_\_\_ + 10}{\_\_\_} = \_\_\_ \qquad x_2 = \frac{-\_\_\_ - 10}{\_\_\_} = \_\_\_$$

c) Comprueba que los dos valores de *x* sean correctos en la situación del número pensado por Sofía.

Con base en lo que sabes de la jerarquía de operaciones, escribe en qué orden deben efectuarse las operaciones en la fórmula general. ____________
____

Intercambia tu libro con el de otro compañero y verifiquen si las ordenaron igual o hay diferencias. Juntos determinen si estas diferencias los pueden llevar a errores.

Los valores de los coeficientes y del término independiente en la fórmula general

1. Completa la tabla 14.2. Recuerda que para usar la fórmula general, la ecuación debe plantearse en su forma general.

Tabla 14.2. Ecuaciones cuadráticas y valores de los coeficientes y el término independiente

Ecuación	a	b	c
$3x^2 - 5x + 2 = 0$			
$4x^2 + 6x = -2$			
	1	−4	3
$3x^2 - 12x + 12 = 0$			
$x^2 + 2x = -80$			
$10x^2 - x = 1.5$			
$5x^2 + 4x - 1 = 8$			
	5	−10	5

2. En cada una de las ecuaciones de la tabla 14.3, existe un error en la sustitución en la fórmula general. Identifícalo y señala cuál es el valor correcto.

Tabla 14.3. Ecuaciones cuadráticas resueltas de manera incorrecta con la fórmula general

Ecuación	Fórmula general	Valor correcto
$3x^2 + 6x - 0.5 = 0$	$x = \frac{6 \pm \sqrt{6^2 - 4(3)(-0.5)}}{2(3)}$	
$4x^2 + x = 3$	$x = \frac{0 \pm \sqrt{0^2 - 4(4)(-3)}}{2(4)}$	
$x^2 + 3x = 10$	$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4(1)(10)}}{2(1)}$	

Una estudiante afirma que en la ecuación $4x^2 + 6x = -2$, el valor de c (que es el término independiente) es −2. ¿Es correcto? __________. Explica por qué ____________________

____.

¿Cuántas soluciones tiene una ecuación cuadrática?

1. Resuelve las ecuaciones utilizando la fórmula general.

Ecuación P:

$3x^2 + 6x - 9 = 0$

Ecuación R:

$x^2 + 4x + 4 = 0$

Ecuación Q:

$5x^2 - 2x + 0.2 = 0$

Ecuación S:

$x^2 + 10x + 9 = 0$

2. Antes de completar la resolución usando la fórmula general, es posible saber si una ecuación tendrá una solución, dos soluciones o ninguna solución. En la fórmula general, $b^2 - 4ac$ es el discriminante y al calcularlo se puede determinar el número de soluciones que tendrá la ecuación.

a) Completa:

- Valor del discriminante de la ecuación P: ________. Número de soluciones: ________.
- Valor del discriminante de la ecuación Q: ________. Número de soluciones: ________.
- Valor del discriminante de la ecuación R: ________. Número de soluciones: ________.
- Valor del discriminante de la ecuación S: ________. Número de soluciones: ________.

¿En qué casos hay una o dos soluciones? ¿En qué casos no hay ninguna solución? Comenta con el grupo tus ideas y arguméntalas poniendo como ejemplos otras ecuaciones de las que hay en esta lección.

Si tienen dudas consulten la información del recuadro "El discriminante" para validar o rectificar sus respuestas.

b) Asigna un valor al término independiente para que la ecuación cumpla con la condición que se pide y utiliza la fórmula general para resolverla.

- $x^2 + 3x +$ ______ $= 0$ $\quad b^2 - 4ac > 0$ $\quad$ Solución(es): ________________.
- $x^2 + 3x +$ ______ $= 0$ $\quad b^2 - 4ac = 0$ $\quad$ Solución(es): ________________.
- $x^2 + 3x +$ ______ $= 0$ $\quad b^2 - 4ac < 0$ $\quad$ Solución(es): ________________.

El discriminante

En la fórmula general de una ecuación cuadrática, el *discriminante* es la expresión que está dentro del radical, o sea: $b^2 - 4ac$; determinando el valor numérico del discriminante es posible saber cuántas soluciones tiene la ecuación. Si:

$b^2 - 4ac > 0$, entonces la ecuación tendrá dos soluciones.
$b^2 - 4ac = 0$, entonces la ecuación tendrá una solución.
$b^2 - 4ac < 0$, entonces la ecuación no tendrá ninguna solución.

Por ejemplo, en la ecuación $x^2 + 3x + 5 = 0$ el valor del discriminante es menor que 0. Usando la fórmula general, tendríamos que:

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4(1)(5)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 20}}{2}$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{-11}}{2}$$

Como el discriminante es −11 y $-11 < 0$, esta ecuación no tiene solución.

3. Resuelve el problema usando la fórmula general.

a) El área total de la figura 4 mide 63 u².

i) Escribe una ecuación en su forma general para hallar el valor de x en la figura 4.

____

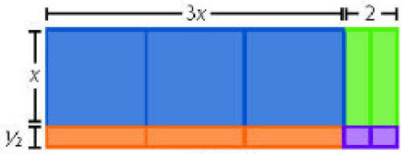


Figura 4

ii) ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación? __________

iii) Usa la solución que tiene sentido en el contexto del problema y escribe cuáles son las medidas de los lados del rectángulo. ________________

b) "Maya pensó un número, lo elevó al cuadrado y triplicó ese resultado. A lo obtenido le sumó la mitad del número que pensó. Por último, restó 130 y obtuvo 0."

i) Escribe una ecuación en su forma general para hallar el valor de *x*.

______

ii) ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación? ______.

iii) ¿Qué número o qué números pudo haber pensado Maya? ______.

4. Resuelve las ecuaciones de la actividad 1 usando la fórmula general. ¿Todas pueden resolverse? ¿En cuáles hubo dos soluciones? ______. ¿En cuáles una? ______.

Determina si las siguientes afirmaciones son verdaderas (V) o falsas (F).

- ____ La forma general es cuando una ecuación cuadrática se iguala a 0.
- ____ Los valores de *a*, *b* y *c* deben ser distintos de 0.
- ____ Las ecuaciones cuadráticas pueden tener hasta dos soluciones.
- ____ La fórmula general puede utilizarse para resolver cualquier ecuación cuadrática.

El mundo en un tablero

Para mejorar tus habilidades en la resolución de ecuaciones cuadráticas mediante la aplicación de la fórmula general, entra a la página http://thales.cica.es/rd/Recursos/rd99/ed99-0161-02/ed99-0161-02.html (Consulta: 18 de noviembre de 2013.)

Explica a un compañero cómo hallar el valor de los coeficientes y del término independiente cuando la ecuación está escrita así: $3x^2 + 18 = 15x$.

Analicemos la partida

¡Y qué mejor que hortalizas frescas!

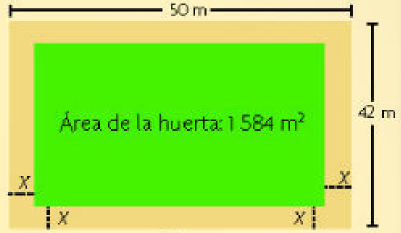


Figura 1a

La huerta que piensa sembrar Edith está en el centro del terreno, así que la distancia del contorno del terreno a los lados del rectángulo que representa la huerta mide lo mismo en todos los lados (figura 1a).

La medida de uno de los lados de la huerta es $50 - 2x$. ¿Cuánto mide el otro lado? ______

Multiplica las medidas de los lados para obtener una ecuación cuadrática. Luego escríbela en su forma general. ______

Utiliza la fórmula general para hallar la solución o las soluciones.

Si hay más de una solución, ¿cuál es la que tiene sentido en el contexto del problema? ______

______

¿Cuánto miden los lados del rectángulo que representa la huerta? ______.

En parejas, escriban en su cuaderno los procedimientos que conozcan para resolver ecuaciones cuadráticas y expliquen cómo se llevan a cabo.

15. Aplicación de criterios de congruencia y semejanza de triángulos

Contenido 3.2. Aplicación de los criterios de congruencia y semejanza de triángulos en la resolución de problemas.

Jaque al rey

En las alturas

Después de visitar la Catedral Basílica de Puebla, a Íngrid le entró la duda de si las torres de los campanarios de esta catedral podrían ser más altas que las de la Catedral Metropolitana de la Ciudad de México.

Como siempre, cuando a Íngrid le surge una duda trata de resolverla —de ser posible— por su cuenta, así que se dio a la tarea de calcular la altura de las torres de ambas catedrales.

Para medir la altura de una torre de la Catedral Basílica de Puebla se valió de un espejo y una cinta métrica, como se muestra en la figura 1, mientras que para la Catedral Metropolitana de la Ciudad de México, además de una cinta métrica, utilizó una vara y la sombra proyectada por la torre en una mañana soleada (figura 2).

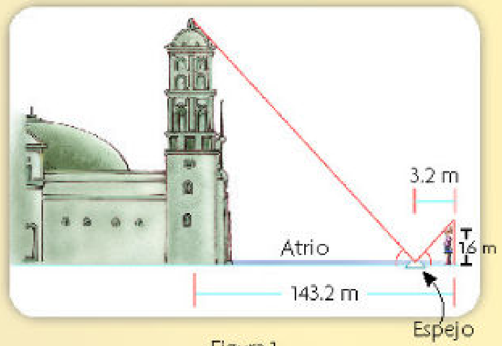


Figura 1

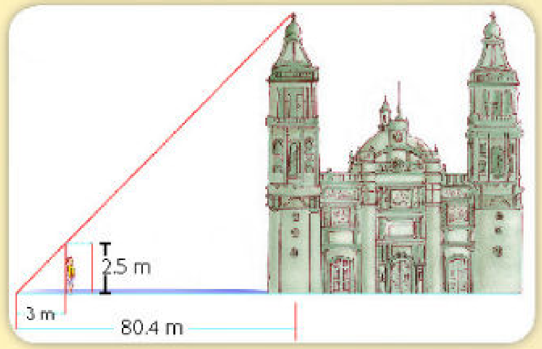


Figura 2

¿Cuál es la altura de la torre del campanario de la Catedral Basílica de Puebla?

______

¿Cuál es la altura de la torre del campanario de la Catedral Metropolitana de la Ciudad de México? ______

Describe en tu cuaderno los procedimientos que utilizó Íngrid para medir la altura de las torres de ambas catedrales.

¿Cuáles son los argumentos matemáticos que validan los procedimientos de Íngrid?

______

______

Apertura

Aplicación de los criterios de congruencia en la resolución de problemas

1. En parejas, analicen la figura 3 en la que se muestran algunos *bungalows* de un área boscosa. El *bungalow* en el punto *M* se encuentra exactamente a la mitad de la distancia entre los *bungalows* de los puntos *A* y *B*, y al mismo tiempo, a la mitad de la distancia entre los *bungalows* de los puntos *P* y *Q*.

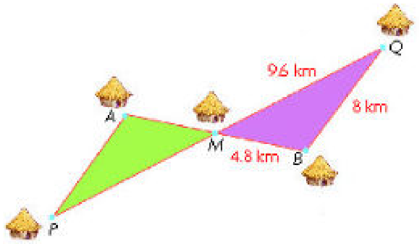


Figura 3

   a) ¿Los triángulos *APM* y *BQM* son congruentes, semejantes o ninguna de estas opciones? ______ ¿Por qué? ______

   b) Escriban en la figura 3 las distancias entre los *bungalows* que están en los puntos *A* y *M*, y los puntos *P* y *M*.

   c) ¿Qué distancia hay entre los *bungalows* que se hallan en los puntos *A* y *P*? ______

Si emplearon los criterios de congruencia para resolver este problema, expliquen cómo lo hicieron. ______

Contrasten sus resultados con los de otros compañeros y, en caso de tener respuestas distintas, coméntenlas y propongan procedimientos para validarlas.

2. En la figuras 4*a*, 4*b* y 4*c*, se trazaron triángulos determinados por los vértices de un hexágono regular.

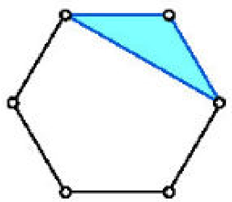


Figura 4*a*

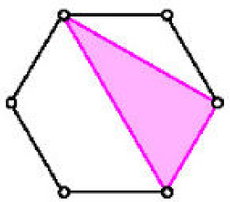


Figura 4*b*

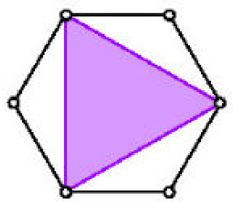


Figura 4*c*

   a) En la figura 4*a*, ¿cuántos triángulos congruentes con el triángulo azul pueden trazarse si sus vértices coinciden con los vértices del hexágono? ______ Trázalos.

   b) En la figura 4*b*, ¿cuántos triángulos congruentes con el triángulo rosa pueden trazarse si sus vértices coinciden con los vértices del hexágono? ______ Trázalos.

   c) En la figura 4*c*, ¿cuántos triángulos congruentes con el triángulo violeta pueden trazarse si sus vértices coinciden con los vértices del hexágono? ______ Trázalos.

   d) En cada uno de los casos anteriores, ¿qué argumentos matemáticos permiten concluir que los triángulos que trazaste son congruentes con los triángulos dados? ______

¿Es posible justificar la congruencia de los triángulos utilizando un criterio de congruencia distinto al que usaste? ______ Comenta tu respuesta con otros compañeros y enriquezcan sus soluciones.

3. En equipos de tres alumnos resuelvan el siguiente problema. El perímetro del triángulo *PQR* es igual al perímetro del triángulo *ABC*. Las medidas de los lados de cada triángulo guardan las siguientes relaciones:

$\overline{PQ} = 3a - 5$

$\overline{QR} = 2a + 6$

$\overline{PR} = a + 5$

$\overline{AB} = 2a + 2$

$\overline{BC} = 5a - 15$

$\overline{AC} = 2a - 2$

¿Con estos datos es posible determinar si el triángulo *PQR* es congruente con el triángulo *ABC*? ______ ¿Con qué argumentos matemáticos pueden justificar su respuesta? ______

Si es posible determinar las medidas de los lados de los triángulos, calculen cuánto miden. ______

Con la guía de su maestro, expongan sus resultados y procedimientos ante el grupo y lleguen a un consenso sobre las respuestas obtenidas.

4. En parejas, resuelvan el problema que se plantea. En la figura 5 la recta $\overline{PM}$ es la mediatriz de $\overline{AB}$:

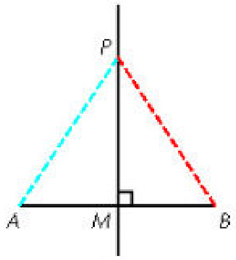


Figura 5

¿Cómo justificarían que cualquier punto *P* sobre la mediatriz del segmento $\overline{AB}$ está siempre a la misma distancia de los puntos *A* y *B*? Escriban la justificación en su cuaderno.

Dibujen en la parte central de una hoja blanca dos puntos (*A* y *B*) y luego tracen todos los puntos que están a la misma distancia tanto de *A* como de *B*. ¿Se forma una línea recta u otra figura? ______ ¿Por qué? ______

¿Qué semejanzas y qué diferencias encuentran entre esta situación y la planteada en el problema? ______

Pidan a su maestro que guíe una plenaria en la que se comente el problema y se den argumentos matemáticos a las cuestiones del mismo.

5. En la figura 6, la semirrecta $\overline{OP}$ es la bisectriz del ángulo *MON*.

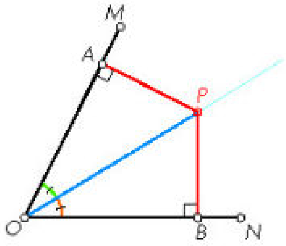


Figura 6

Tomando en cuenta los elementos de la figura 6, ¿cualquier punto *P* sobre la bisectriz del ángulo queda a la misma distancia de las semirrectas que forman el ángulo *MON*, es decir, la longitud del segmento $\overline{AP}$ es igual que la del segmento $\overline{BP}$? ______ Justifica tu respuesta. ______

Considera la siguiente situación: si en un ángulo *ABC* se traza un punto *P* de manera que esté a la misma distancia de las semirrectas $\overline{BA}$ y $\overline{BC}$, ¿entonces el punto *P* pertenece a la bisectriz del ángulo? ______ Explica por qué. ______

¿Qué semejanzas y qué diferencias encuentras entre esta situación y la planteada en el problema? ______

Pidan a su maestro que guíe una plenaria en la que se comente el problema y se den argumentos matemáticos a las cuestiones del mismo.

6. Analiza la construcción geométrica de la figura 7 y determina los valores *x*, *y* y α.

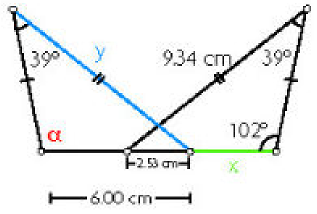


Figura 7

Escribe los valores que encontraste:

x = ______ *y* = ______ α = ______

Reúnete con un compañero y expliquen los criterios de congruencia que utilizaron para resolver este problema. ______

Escriban otra forma en que podrían validar sus resultados y expónganla ante el grupo.

7. Al trazar una de las diagonales del cuadrilátero *PQRS* se obtienen dos triángulos congruentes. ¿Qué clase de cuadrilátero es? ______ Justifica tu respuesta. ______

¿Cuántos tipos de cuadriláteros encontraste? ______ ¿Son los únicos? ______ Comparte tus argumentos con otros compañeros y validen sus respuestas.

El mundo en un tablero

Para mejorar tus habilidades en el uso de los criterios de congruencia, visita la página: http://aritmosiete.blogspot.mx/2011/10/congruencia-de-triangulos.html (Consulta: 20 de abril de 2013.)

En equipo, comenten de qué manera se usa la congruencia de triángulos en la resolución del problema presentado en el video.

Aplicación de los criterios de semejanza en la resolución de problemas

1. Una persona observa por medio de un espejo el borde superior del monumento conocido como los Indios Verdes, al noreste de la Ciudad de México. El espejo se encuentra a 1.81 m de sus pies y a 11.59 m de la base del monumento. Sus ojos sobre el piso alcanzan una altura de 1.72 m (figura 8).

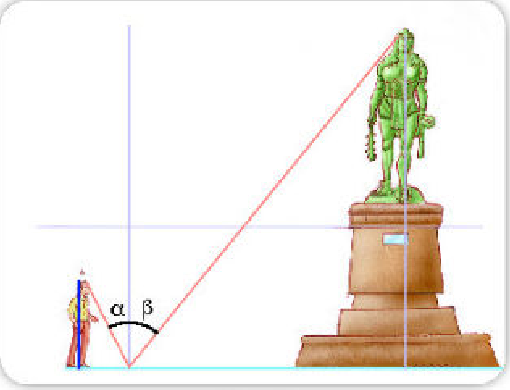


Figura 8

a) ¿Es posible calcular la altura del monumento con estos datos? ______ Si tu respuesta es afirmativa, ¿cómo la calcularías? ______ Si no es posible, explica por qué. ______

b) Si el ángulo de incidencia α y el ángulo de reflexión β son iguales entre sí, ¿qué altura alcanza el monumento? Justifica tu respuesta. ______

Compara tus respuestas con las de otros compañeros y, de ser necesario, modifícalas. ¿Por qué es importante saber que los ángulos α y β son iguales para resolver el problema? ______

Glosario

ángulo de incidencia y ángulo de reflexión: cuando un rayo de luz se refleja sobre un objeto se forman dos ángulos respecto a una *recta normal* (perpendicular a la superficie donde se refleja). Éstos son el ángulo de incidencia y el ángulo de reflexión. Ambos siempre son iguales. En la figura 8 el ángulo de incidencia es β y el ángulo de reflexión es α.

2. Las piezas de un tangram se han acomodado como en la figura 9*a*. Con un tangram más pequeño se empieza a hacer la misma figura como se muestra en la figura 9*b*.

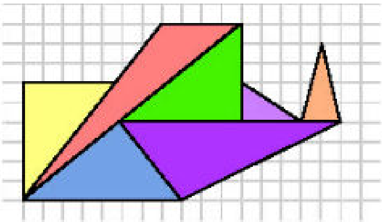


Figura 9*a*

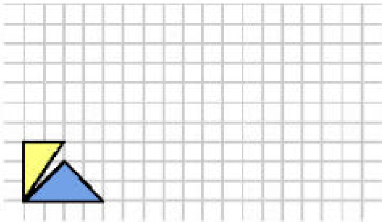


Figura 9*b*

a) Describe un procedimiento para seguir dibujando la figura 9*b* sin que ésta deje de ser semejante a la original (9*a*). ______

b) Termina de dibujar la figura 9*b* de tal manera que se conserve la forma de la figura 9*a*.

¿Cómo es posible comprobar que las medidas de los segmentos de la figura 9*b*, correspondientes con los de la figura 9*a*, son proporcionales? ______

3. Reúnete con un compañero y resuelvan este problema. Ciro está parado a cierta distancia del borde de una zanja, desde donde observa el borde y el fondo de la misma como se muestra en la figura 10. La zanja tiene un ancho de 1.50 m.

Figura 10

a) ¿Cuál es la profundidad de la zanja? Justifiquen su respuesta. ______

b) ¿Qué distancia hay entre los ojos de Ciro y el fondo de la zanja que puede observar? ______

Indiquen en la figura 10 los triángulos semejantes que emplearon para resolver el problema y expliquen qué criterios de semejanza usaron para verificar que, en efecto, sean semejantes. ______

Si propusieron una solución sin utilizar la semejanza de triángulos, replanteen el problema usando esta propiedad geométrica.

4. En la figura 11 se muestra la distribución de cinco puntos en el plano. Los segmentos $\overline{AQ}$ y $\overline{PB}$ son paralelos, y los puntos *A*, *M* y *B* son colineales.

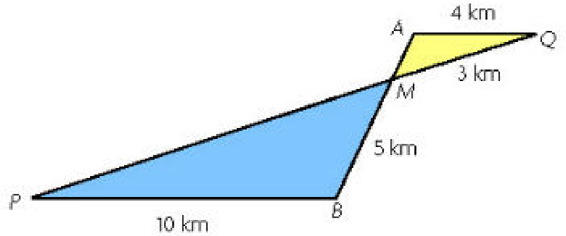


Figura 11

a) Calcula las distancias entre los puntos:

i) De *A* a *M*: ______

ii) De *M* a *P*: ______

b) Supón que los puntos representan la ubicación de varios supermercados. Si un proveedor de lácteos determinó recorrer la siguiente ruta: *A*, *Q*, *M*, *B*, *P* y *M*, ¿qué distancia recorrió en total? ______.

¿Qué similitudes hay entre este problema y el de la actividad 1? ______

Compara tus resultados con los de otros compañeros y comenten cómo emplearon los criterios de semejanza. De ser necesario, modifiquen sus respuestas.

El mundo en un tablero

Para mejorar tus conocimientos sobre la semejanza de triángulos visita la página http://www.geogebratube.org/student/m11012 (Consulta: 21 de abril de 2013.)

Manipulen los vértices del triángulo rojo para explorar los efectos de los factores de escala en los triángulos semejantes correspondientes.

En parejas, comenten el papel de la semejanza de triángulos para explicar el significado de:

- Factor de escala ≥ 1
- Factor de escala < 1

Analicemos la partida

En las alturas

Indica en la figura 1*a* el ángulo de incidencia α y el ángulo de reflexión β. ¿Qué propiedad tienen estos ángulos? ______.

¿Qué criterio utilizarías para determinar que los triángulos *ABC* y *ADE* son semejantes?

______.

Si lo que desea Íngrid es calcular la altura de las torres del campanario de la Catedral Basílica de Puebla, ¿qué criterio emplearía para determinar dicha altura? ______

______.

Reúnete con dos compañeros, contrasten sus repuestas y los argumentos de cada quien. Si hay discrepancias en el resultado o en los argumentos, soliciten la guía de su maestro para llegar a un consenso.

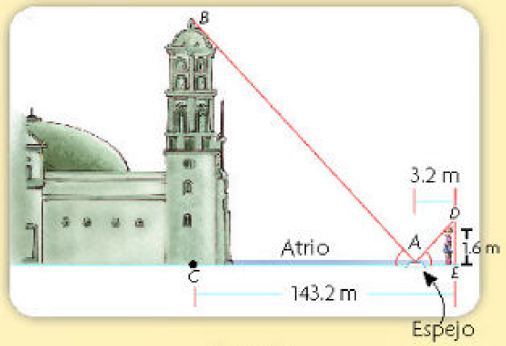


Figura 1*a*

En parejas etiqueten, en la figura 2*a*, los vértices y los lados de los triángulos formados por las sombras proyectadas por la torre de la Catedral Metropolitana de la Ciudad de México y por la vara de Íngrid. Después planteen ustedes mismos preguntas similares a las que se hicieron para la Catedral Basílica de Puebla, respóndalas y determinen la altura de las torres de la catedral.

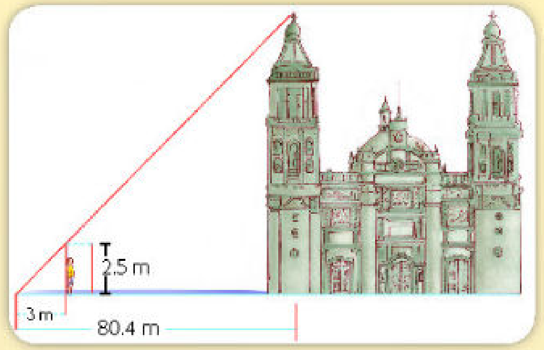


Figura 2*a*

16. El teorema de Tales

Contenido 3.3. Resolución de problemas geométricos mediante el teorema de Tales.

Jaque al rey

Sombras que iluminan mentes

Una de las leyendas más conocidas acerca del filósofo y matemático griego Tales de Mileto (relatada por Plutarco) es la que le atribuye haber calculado la altura de la pirámide de Keops de una manera ingeniosa y elegante.

¡El único instrumento que empleó fue un bastón!, además de la luz del sol que hacía posible que se proyectaran las sombras de la pirámide y el bastón (figura 1). El procedimiento que siguió fue éste: clavó el bastón en la arena y a continuación midió su sombra; conocía, desde luego, la longitud del bastón después de haberlo enterrado un poco. Después midió la sombra de la pirámide y con estos datos calculó su altura.

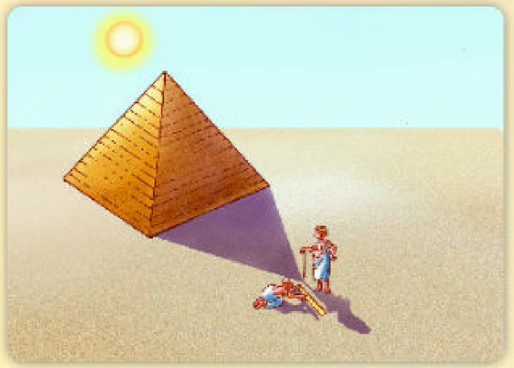


Figura 1

¿Qué procedimiento matemático utilizó Tales para calcular la altura de la pirámide de Keops? ____________

Para ilustrar tu respuesta escribe un ejemplo del procedimiento con tus propias propuestas de las medidas del bastón y las sombras.
Sobre la figura 1 realiza los trazos geométricos que consideres convenientes para la medición de la altura de la pirámide.

Apertura

▶ Proporcionalidad y semejanza

1. Los triángulos de la figura 2 son semejantes.

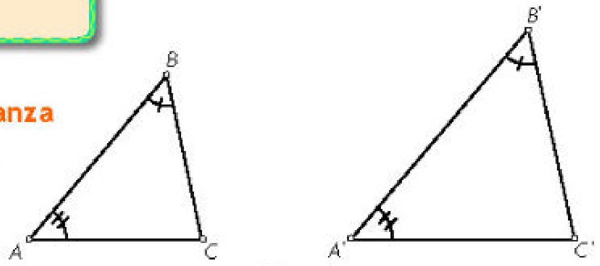


Figura 2

a) Encierra la igualdad o las igualdades que son verdaderas.

$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{A'B'}}$	$\measuredangle BAC = \measuredangle B'C'A'$	$\frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}$	$\overline{AC} = \overline{A'C'}$

b) En la figura 3, el segmento $\overline{B'C'}$ es paralelo al segmento $\overline{BC}$.

i) ¿Son semejantes los triángulos ABC y $AB'C'$? ______. Explica por qué. ______

ii) En equipos de tres alumnos, comparen sus respuestas del inciso *i* y contesten lo siguiente:

- ¿Determinaron la medida de algunos segmentos para establecer si los lados son proporcionales? ______. Si no lo hicieron, ¿cómo determinaron la proporcionalidad? ______.
- ¿Cuál es la razón de semejanza? ______.
- ¿De qué manera pueden calcular las medidas de los ángulos homólogos? ______

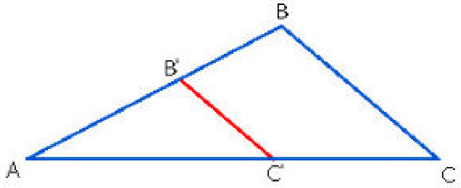


Figura 3

iii) Si el segmento $\overline{B'C'}$ no fuera paralelo a $\overline{BC}$, ¿podría afirmarse que los triángulos ABC y $AB'C'$ son semejantes? ______. ¿Por qué? ______

En la figura 3 tracen otro segmento cuyos extremos sean los puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$. Llámenlos P y Q, respectivamente.

a) ¿Cuáles son las medidas de los lados del triángulo APQ? ______.

b) ¿Es semejante el triángulo APQ al triángulo ABC? ______. Justifiquen su respuesta. ______

c) ¿Es paralelo el segmento $\overline{PQ}$ al segmento $\overline{AB}$? ______. Expliquen por qué. ______

2. Dibuja un triángulo ABC en tu cuaderno. Señala el punto M sobre el segmento $\overline{AB}$ a una distancia de 3.5 cm del vértice A. A partir de ahí traza una paralela al segmento $\overline{BC}$. Al punto de intersección de esta recta paralela con el lado $\overline{AC}$ desígnalo con N.

a) ¿Cuáles son las medidas de los lados del triángulo AMN? ______.

b) ¿El triángulo AMN es semejante al triángulo ABC? ______. ¿Por qué? ______

¿El punto M que trazaste quedó entre los puntos A y B? ______. Si no fue así, repite la construcción del problema, pero ahora con una distancia mayor de M a A que de B a A. ¿El triángulo AMN es siempre semejante al triángulo ABC, independientemente de dónde se localice M? ______. Explica por qué. ______

▶ Construcciones geométricas con juego de geometría

1. En parejas, realicen la siguiete construcción geométrica en una hoja blanca; utilicen regla y escuadras sin graduar.

- Tracen un segmento cualquiera $\overline{AB}$
- Por el punto A tracen una semirrecta con dirección distinta al segmento anterior.
- Con el compás, dibujen una circunferencia C_1 con centro en A y una abertura aproximada al grueso de tu pulgar.

- El punto de intersección de la semirrecta con C_1 es T_1.
- Con la misma abertura del compás, y haciendo centro en T_1, vuelvan a trazar otra circunferencia. Al nuevo punto de intersección con la semirrecta nómbrenlo T_2.
- Repitan el procedimiento hasta obtener el punto T_5.
- Tracen el segmento cuyos extremos serán el punto T_5 y el punto B.
- Con las escuadras, tracen una recta paralela al segmento $\overline{T_5B}$ que pase por T_1. La intersección de esta recta con el segmento $\overline{AB}$ se llamará S_1. Repitan el procedimiento para obtener S_2, S_3, S_4 y S_5.

a) ¿Cuántos triángulos se han obtenido? ______

b) ¿Los triángulos obtenidos son semejantes? ______ ¿Por qué? ______

c) En cuanto a su longitud, ¿cómo son los segmentos $\overline{AS_1}$ y $\overline{S_1S_2}$? ______ ¿Y $\overline{S_1S_2}$ con $\overline{S_3S_4}$? ______ ¿Por qué? ______

d) ¿En cuántas partes quedó dividido el segmento $\overline{AB}$? ______

e) Para dividir el segmento $\overline{AB}$ en siete secciones iguales, ¿qué es necesario modificar en la construcción? ______

Describan la relación entre esta construcción geométrica y la actividad 2 del tema "Proporcionalidad y semejanza". ______ ¿Cuál es el propósito de la construcción geométrica que realizaste? ______

El mundo en un tablero

Con la finalidad de mejorar tus habilidades en el manejo de las razones entre las longitudes de los segmentos determinados por paralelas, visita el sitio http://proyectodescartes.org/telesecundaria/materiales_didacticos/3m_b03_t03_s01-3S/index.html (Consulta: 21 de enero de 2017.)

Modifica la configuración de la construcción para visualizar la proporcionalidad entre los segmentos.

2. Un arquitecto dibujó un esquema importante para una obra (figura 4). Por un descuido, la hoja ya no está completa y necesita saber la longitud del segmento color negro.

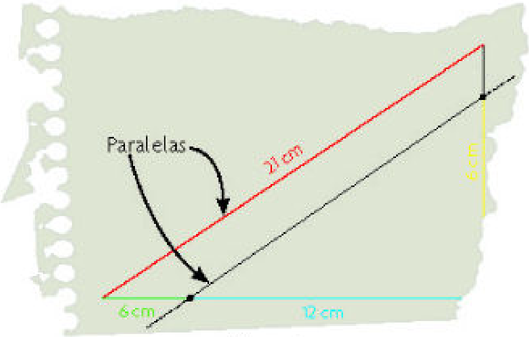


Figura 4

¿Cuánto mide este segmento negro? ______ ¿Por qué? ______

Con base en la información del recuadro "Teorema de Tales", responde esta pregunta: ¿Cómo se relaciona el teorema de Tales con este problema? ______

Teorema de Tales

Si dos o más rectas paralelas son cortadas por dos transversales, entonces los segmentos en las transversales limitados por las paralelas son proporcionales.

3. En equipos, dividan el segmento $\overline{AE}$ de la figura 5 en cuatro secciones iguales. Marquen los puntos que quedan dentro del segmento $\overline{AE}$ con las letras B, C y D de manera que B sea el que quede más cerca de A, y D el más cercano a E.

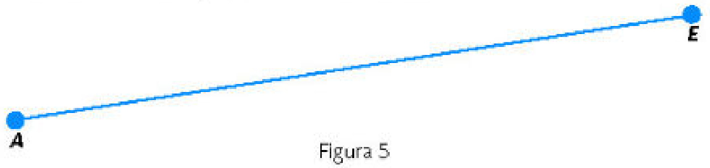


Figura 5

a) ¿Qué posición ocupa el punto C dentro del segmento? ______ ¿Cuál es el valor del cociente $\frac{\overline{AC}}{\overline{CE}}$? ______ ¿En qué proporción se encuentran las longitudes de los segmentos $\overline{AC}$ y $\overline{CE}$? ______

b) ¿Qué posición ocupa el punto B dentro del segmento? ______ ¿Cuál es el valor del cociente $\frac{\overline{AB}}{\overline{BE}}$? ______ ¿En qué proporción se encuentran las longitudes de los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{BE}$? ______

c) ¿Qué posición ocupa el punto D dentro del segmento? ______ ¿Cuál es el valor del cociente $\frac{\overline{AD}}{\overline{DE}}$? ______ ¿En qué proporción se encuentran las longitudes de los segmentos $\overline{AD}$ y $\overline{DE}$? ______

Comparen sus respuestas con las de otro equipo. ¿Las proporciones encontradas son las mismas? ______ ¿Por qué? ______

4. Consideren el segmento $\overline{PR}$ de la figura 6.

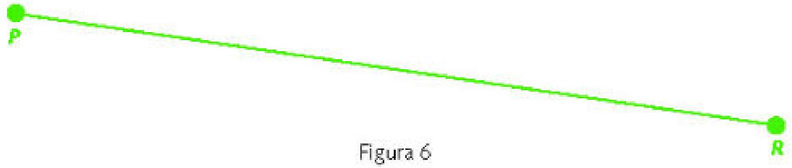


Figura 6

a) En el segmento $\overline{PR}$ ubiquen un punto Q de manera que $\frac{\overline{PQ}}{\overline{QR}} = \frac{3}{4}$.

b) Describan el procedimiento que siguieron para localizar el punto Q. ______

c) ¿Dónde se debe colocar un punto T para que $\frac{\overline{PT}}{\overline{TR}} = 1$? ______

d) ¿En cuántas secciones hay que dividir el segmento $\overline{PR}$ si se quiere encontrar un punto M de tal forma que $\overline{PM}$ sea a $\overline{MR}$ como 3 es a 5? ______
¿Y para que la proporción sea de 1 a 7? ______
¿Y para que sea de n a m? ______

Comenten en el grupo las respuestas que obtuvieron. Obtengan una conclusión sobre el caso general planteado en el inciso *d* de la actividad 4.

5. Dado un triángulo equilátero *ABC* (figura 7), se trazan los puntos medios de los lados y se toman éstos como vértices para construir un nuevo triángulo *PQR*.

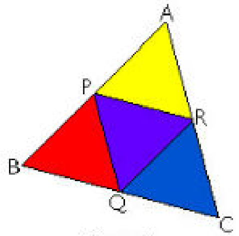


Figura 7

a) ¿Son semejantes los triángulos *ABC* y *APR*? ______
¿Por qué? ______

¿Son semejantes los triángulos *ABC* y *PBQ*? ______
¿Por qué? ______

b) Un turista observa la Torre Eiffel a cierta hora del día (figura 8).

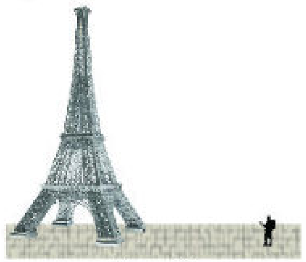


Figura 8

Escribe un procedimiento para calcular la altura de la Torre Eiffel si la estatura del turista que la observa (figura 8) es un dato conocido. ______

c) Imagina que en cierto momento del día la sombra de la torre y la del turista coinciden, como se muestra en la figura 9.

Figura 9

Dibuja en tu cuaderno un modelo geométrico que explique cómo calcular la altura de la torre.

En parejas, comenten si los problemas de los incisos *b* y *c* tienen una solución o varias soluciones. Expongan con claridad las ideas matemáticas que justifiquen sus respuestas.

Analicemos la partida

Sombras que iluminan mentes

De acuerdo con la figura 10, construye un modelo geométrico que utilice el teorema de Tales para determinar la altura de la pirámide de Keops.

Considera que los rayos del sol son paralelos y que la longitud de las sombras se midió usando el bastón de Tales como unidad (b).

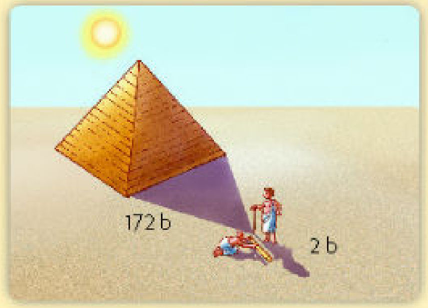


Figura 10

Altura de la pirámide: ______

a) Suponiendo que Tales tenía una estatura de 1.70 m, al igual que la longitud de su bastón, ¿cuál era la altura de la pirámide en metros? ______

¿Al calcular la altura de la pirámide tomaste en cuenta su forma? ______. ¿La forma del bastón y de la pirámide afecta el cálculo que realizaste? ______. Si tu respuesta es afirmativa, ¿es posible que a pesar de ello Tales calculara correctamente la altura de la pirámide? ______. Explica tu respuesta. ______

17. Figuras homotéticas

Contenido 3.4. Aplicación de la semejanza en la construcción de figuras homotéticas.

Jaque al rey

El Sol en la palma de la mano

Para calcular el diámetro del Sol, un aficionado a la astronomía construye un dispositivo conformado por un tubo de 180 cm de largo por 15 cm de diámetro. En uno de los extremos coloca una tapa de aluminio en la que previamente hizo un agujero en el centro de 1 mm, y el otro extremo lo cubre con una hoja de papel cebolla (figura 1).

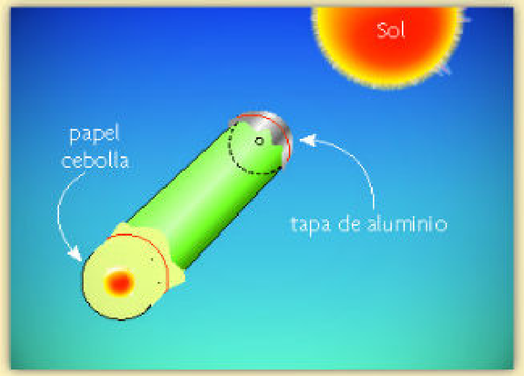


Figura 1

Como se muestra en la figura 1, al enfocar el Sol éste se proyecta en la hoja de papel cebolla alcanzando un diámetro de 1.7 cm. Un dato que el aficionado sabe es que la distancia de la Tierra al Sol es de 149 600 000 km, y con esta información puede calcular el diámetro del Sol.

Con ayuda de un modelo geométrico, determina el diámetro del Sol. Justifica en tu cuaderno la respuesta.

Apertura

La homotecia

1. Formen equipos de tres alumnos y lleven a cabo el siguiente experimento.

a) Peguen una cartulina blanca en una pared y coloquen una lámpara a una distancia *D* de 1 m. Luego recorten un rectángulo de cartoncillo de 4 cm de ancho por 10 cm de largo; enciendan la lámpara y coloquen el rectángulo de cartoncillo exactamente a una distancia *d* de 50 cm de la lámpara (figura 2).

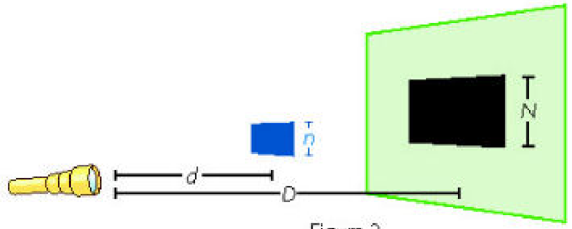


Figura 2

b) Tracen en la cartulina de la pared el contorno de la sombra que proyecta el rectángulo de cartoncillo. ¿Cuánto mide de ancho? ________ ¿Y de largo? ________.

c) Repitan el experimento con las distancias indicadas en la tabla 17.1 y complétenla.

Tabla 17.1. Dimensiones de la sombra proyectada por un rectángulo de cartoncillo a diferentes distancias

Distancia *d* del rectángulo a la lámpara (cm)	Distancia *D* de la pared a la lámpara	Cociente $\frac{D}{d}$	Ancho *n* del rectángulo	Ancho *N* de la sombra	Cociente $\frac{N}{n}$
20					
40					
50					
60					
80					

d) Con base en la información de la tabla 17.1, ¿qué relación hay entre el cociente $\frac{D}{d}$ y el cociente $\frac{N}{n}$? ________.

¿La relación entre el ancho del rectángulo de cartoncillo y el ancho de la sombra es proporcional? ________ ¿Por qué? ________

¿El rectángulo y la sombra proyectada por él son semejantes? Justifiquen su respuesta.

____

¿Pasará lo mismo con otras figuras como un círculo o, en general, cualquier polígono? Expliquen su respuesta. ________

2. A partir del punto *O* de la figura 3 se traza una semirrecta que pasa por el vértice *A* del polígono *ABCDEF*. En la semirrecta $\overline{OA}$ se localiza un punto *A'* de manera que la longitud $\overline{AA'}$ sea igual a la longitud del segmento $\overline{OA}$.

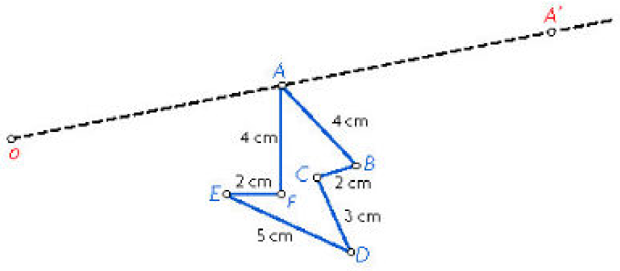


Figura 3

a) Traza todas las semirrectas desde *O* a cada vértice del polígono y encuentra los puntos *B'*, *C'*, *D'*, *E'* y *F'* de la misma manera que se hizo con *A'*.

b) Dibuja el polígono *A'B'C'D'E'F'* y mide la longitud de sus lados. ¿Cuál es la razón entre los lados correspondientes de los polígonos *ABCDEF* y *A'B'C'D'E'F'*? ________

c) ¿Cómo son entre sí los ángulos de los polígonos *ABCDEF* y *A'B'C'D'E'F'*? Explica tu respuesta. ________

¿Cuál es la razón entre el perímetro del polígono *A'B'C'D'E'F'* y el polígono *ABCDEF*? ________. Reúnete con un compañero y exponle con claridad cómo inferiste la razón entre el perímetro de los polígonos. ________

Homotecia

La homotecia es una transformación geométrica que consiste en hacer corresponder un punto *A* con otro punto *A'* a partir de una línea recta que parte desde un punto *O* (centro de homotecia), como se muestra en la figura 4. La razón $\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$ se llama razón de homotecia.

En el ejemplo, los triángulos *ABC* y *A'B'C'* son homotéticos, *O* es el centro de homotecia y se cumple la igualdad: $k = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OB'}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OC'}}{\overline{OC}}$.

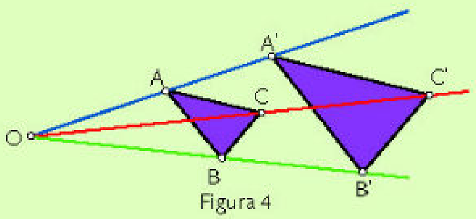


Figura 4

Analicen la información del recuadro "Homotecia" y contesten las preguntas que se plantean.

- En el experimento de las sombras de la actividad 1, ¿qué elemento representa el centro de homotecia? ________. Expliquen por qué. ________
- ¿Cuál es la razón de homotecia en la actividad 1 cuando el rectángulo de cartoncillo se encuentra a la misma distancia de la lámpara que de la pantalla? ________

3. Una compañía china de teatro de sombras está ensayando una obra infantil de la tradición popular de aquel país (figura 5).

En parejas, analicen y contesten las preguntas que se plantean en los incisos.

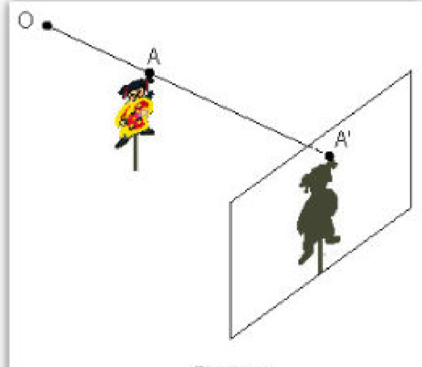


Figura 5

a) ¿A qué distancia de la fuente luminosa *O* debe colocarse la marioneta para que la imagen en la pantalla (que se encuentra a una distancia $d = \overline{OA'}$) tenga el doble de tamaño? ________. ¿Y el triple? ________. ¿Y el cuádruple? ________

i) ¿Qué sucede con la razón de homotecia cuando el punto *A* se aproxima mucho al punto *O*? Justifiquen su respuesta. ________

ii) Escriban una expresión que determine los posibles valores de la razón de homotecia *k* en las situaciones propuestas.

- ¿*k* puede ser igual a 0? ________ ¿Por qué? ________
- ¿*k* puede ser igual a 1? ________ ¿Por qué? ________

iii) Si la distancia entre *O* y *A'* es de 5 m y *k* = 4, ¿a qué distancia de *O* se encuentra *A*?

____

b) Analicen ahora la figura 6 de un cómic japonés (*manga*).

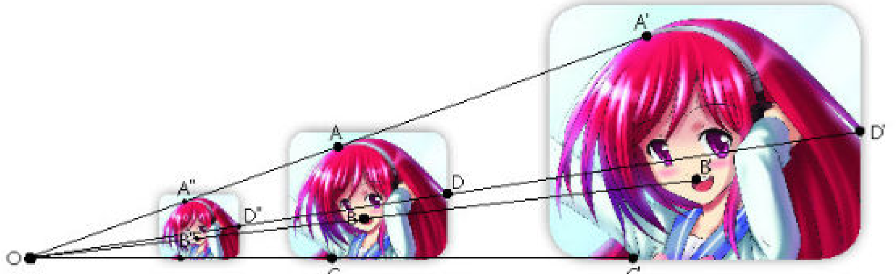


Figura 6

i) Midan la longitud de los segmentos.

$\overline{OA''}$: ______ $\overline{OA}$: ______ $\overline{OA'}$: ______

$\overline{OB''}$: ______ $\overline{OB}$: ______ $\overline{OB'}$: ______

$\overline{OC''}$: ______ $\overline{OC}$: ______ $\overline{OC'}$: ______

$\overline{OD''}$: ______ $\overline{OD}$: ______ $\overline{OD'}$: ______

ii) Obtengan los cocientes:

$\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$ = ______ $\frac{\overline{OB'}}{\overline{OB}}$ = ______ $\frac{\overline{OC'}}{\overline{OC}}$ = ______ $\frac{\overline{OD'}}{\overline{OD}}$ = ______

iii) ¿Cuál es la razón de homotecia entre la figura *ABCD* y su homotética *A'B'C'D'*?

______

iv) Calculen los cocientes:

$\frac{\overline{OA''}}{\overline{OA}}$ = ______ $\frac{\overline{OB''}}{\overline{OB}}$ = ______ $\frac{\overline{OC''}}{\overline{OC}}$ = ______ $\frac{\overline{OD''}}{\overline{OD}}$ = ______

v) ¿Cuál es la razón de homotecia entre la figura *ABCD* y su homotética *A''B''C''D''*?

______

Bosquejen sobre la ilustración de la figura 6 una imagen semejante a *ABCD*, cuya razón de homotecia con ésta sea $k = 1.3$. Comparen sus respuestas con las de otros equipos. En caso de haber diferencias, encuentren la fuente del error.

4. Analiza la figura 7.

a) Localiza los puntos *P'*, *Q'* y *R'* a la izquierda de *O*, de manera que queden sobre las mismas rectas en las que están *P*, *Q* y *R*, respectivamente. Se debe cumplir que $\overline{OP} = \overline{OP'}$, $\overline{OQ} = \overline{OQ'}$ y $\overline{OR} = \overline{OR'}$.

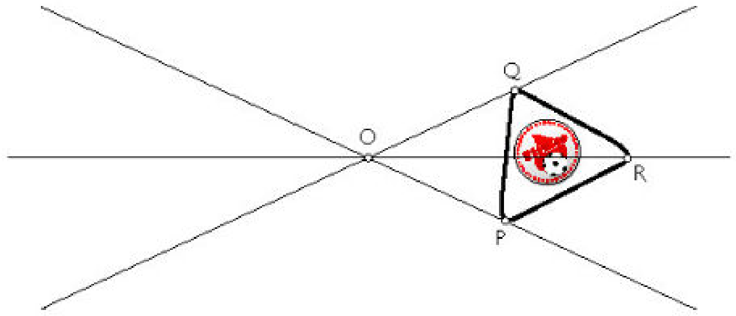


Figura 7

b) Toma como referencia los puntos localizados para bosquejar el logotipo. ¿Qué sucedió con la posición del logotipo? ______

c) ¿Qué posición ocupa el centro de homotecia *O* respecto a los dos logotipos? ______

______

d) Suponiendo que *O* es el origen de una recta numérica que contiene a *P*, ¿qué sentido tiene el segmento $\overline{OP}$ (positivo o negativo)? ______. ¿Qué sentido tiene el segmento $\overline{OP'}$? ______

e) Considerando segmentos dirigidos, ¿cuál es la razón de homotecia? ______. Explica por qué. ______

Con la guía de su maestro, escriban una conclusión sobre cuál es el efecto de aplicar en una figura una homotecia cuya razón sea positiva y cuál es el efecto de aplicar una razón negativa. ______

5. En parejas, analicen las estrellas de la figura 8.

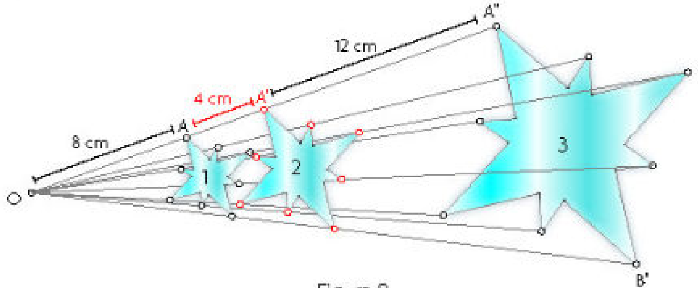


Figura 8

a) A la estrella 1 se le aplicó una homotecia y se obtuvo la estrella 2. ¿Cuál fue la razón de homotecia? ______

b) A la estrella 2 se le aplicó una homotecia para obtener la estrella 3. ¿Qué razón de homotecia se empleó? ______

c) ¿Las estrellas 1 y 3 son semejantes? ______. ¿Por qué? ______

______

d) ¿La estrella 3 es homotética respecto a la estrella 1? ______. ¿Por qué? ______

______

Si lo es, ¿cuál es la razón de homotecia? ______

e) Si el segmento $\overline{A''B''}$ = 13.53 cm, ¿cuánto mide el segmento homólogo en la estrella 1?

______

El mundo en un tablero

Para ampliar tus conocimientos sobre homotecia visita la página http://www.disfrutalasmatematicas.com/geometria/reescala.html (Consulta: 22 de junio de 2013.) en la que podrás visualizar el efecto que tiene sobre una figura la aplicación de distintas razones de homotecia. Explora el sitio y resuelve algunos ejercicios.

¿Qué relación hay con los conceptos explorados en esta lección? ______

______

Analicemos la partida

El Sol en la palma de la mano

Retoma el problema de la sección "Jaque al rey". Observen la figura 9.

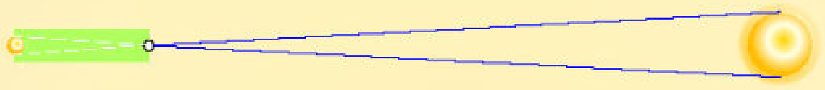


Figura 9

a) Si consideras un modelo geométrico de homotecia para explicar el diagrama de la figura 9, ¿qué papel desempeña el orificio del dispositivo en el modelo geométrico? __________

b) ¿Qué tipo de homotecia se determina con el dispositivo? __________

c) ¿Qué expresión determina la relación entre el largo del dispositivo, la distancia de la Tierra al Sol y el diámetro de la figura proyectada del Sol? __________

¿Qué argumento matemático permite al estudiante de astronomía justificar su cálculo del diámetro aproximado del Sol? __________
¿Su cálculo es exacto o aproximado? __________ ¿Por qué? __________

18. Gráficas de funciones cuadráticas

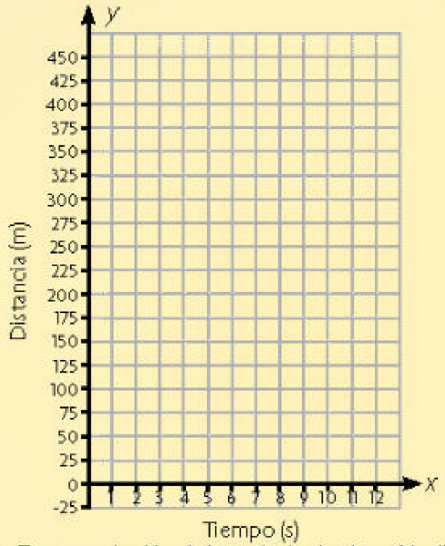
Contenido 3.5. Lectura y construcción de gráficas de funciones cuadráticas para modelar diversas situaciones o fenómenos.

Jaque al rey

¡Rescatada a tiempo!

En la azotea de un rascacielos, el supervillano Lúxor está a punto de eliminar a Liusa.

Un segundo antes de ser atrapada, Liusa se da cuenta del peligro que corre y salta a la cornisa. Momentáneamente se pone a salvo, sin embargo, una ráfaga de aire la hace perder el equilibrio y cae desde los 450 m de altura a los que se encuentra la azotea.



Gráfica 18.1. Representación del movimiento de caída libre de Liusa

La caída puede modelarse mediante la función cuadrática $y = -4.9x^2 + 450$, en la que y indica la distancia a la que se encuentra Liusa del suelo en el tiempo x.

¿Cuántos segundos tendría una superheroína para rescatar a Liusa antes de que ésta llegue al piso?

____

En la gráfica 18.1, traza la función cuadrática $y = -4.9x^2 + 450$ y, con base en ella, describe la caída de Liusa empleando las expresiones "más rápido", "menos rápido" y "despacio".

____

Apertura

Construcción de gráficas de funciones cuadráticas

1. ¿Cómo completarías las tablas 18.1 y 18.2 de acuerdo con las medidas indicadas del lado? Con los datos de cada tabla, traza las gráficas correspondientes; en ambos casos utiliza el plano cartesiano de la gráfica 18.2.

Tabla 18.1. Medida del lado y el perímetro de un cuadrado

Medida del lado x (cm)	Medida del perímetro y (cm)
0	
0.5	
1	
2	
3	
3.5	
4	
10	
15	

Tabla 18.2. Medida del lado y el área de un cuadrado

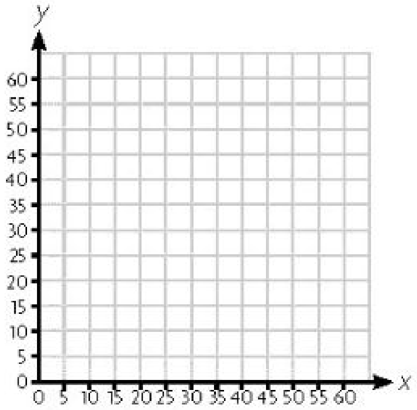
Medida del lado x (cm)	Medida del área y (cm²)
0	
0.5	
1	
2	
3	
3.5	
4	
5	
7	

a) Describe con tus propias palabras la gráfica que representa la relación entre el lado del cuadrado y su perímetro. ____________

b) Describe en tus propios términos la gráfica que representa la relación entre el lado del cuadrado y su área. ____________

c) Completa correctamente los enunciados:

i) La gráfica que representa la relación entre el lado del cuadrado y su ____________ es una función cuadrática.



Gráfica 18.2. Variación del perímetro y el área de un cuadrado respecto a la medida del lado

ii) La gráfica que representa la relación entre el lado del cuadrado y su ____________ es una función lineal.

Reúnete con dos compañeros y contrasten la forma en que describieron cada gráfica. Comenten las similitudes y las diferencias encontradas.

Con la guía de su maestro, lleguen a una conclusión sobre cuál es la descripción más apropiada. Incluyan argumentos matemáticos para justificar su descripción.

2. En parejas, determinen los valores de y en las tablas 18.3 y 18.4. Después, cada quien debe trazar una gráfica con los datos correspondientes. Al terminar de trazar las gráficas 18.3 y 18.4, compárenlas y respondan las preguntas que se formulan.

a) ¿Qué semejanzas y qué diferencias encuentran entre las gráficas 18.3 y 18.4? Escríbanlas en su cuaderno.

b) De las gráficas trazadas hasta ahora en la lección, ¿cuáles son parábolas? Justifiquen su respuesta apoyándose en la información del glosario.

____

____

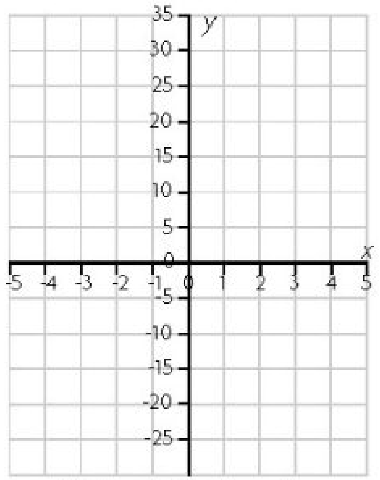
Tabla 18.3. Tabla de valores de la expresión $y = 2x^2 + 4$

x	$y = 2x^2 + 4$
−4	
−3	
−2	
−1	
0	
1	
2	
3	
4	

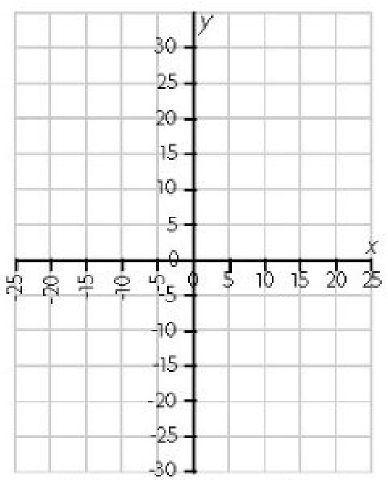
Tabla 18.4. Tabla de valores de la expresión $x = -2y^2 + 4$

x	$x = -2y^2 + 4$
−4	
−3	–
−2	
−1	
0	
1	
2	
3	
4	

Mónica hace la siguiente afirmación: "Las gráficas de las funciones cuadráticas tienen forma curva porque los valores aumentan muy rápido, es decir, si en el eje x un valor aumenta el doble, el valor correspondiente en el eje y también aumenta el doble; si aumenta el triple en el eje x, también aumenta el triple en el eje y, y así sucesivamente".



Gráfica 18.3. Expresión $y = 2x^2 + 4$



Gráfica 18.4. Expresión $x = -2y^2 + 4$

Escribe argumentos a favor o en contra de la afirmación de Mónica y coméntalos con otros compañeros.

ARGUMENTOS A FAVOR:

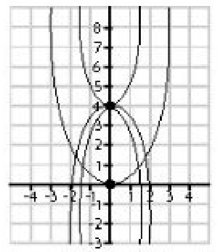
- ____________
- ____________
- ____________

ARGUMENTOS EN CONTRA:

- ____________
- ____________
- ____________

Glosario

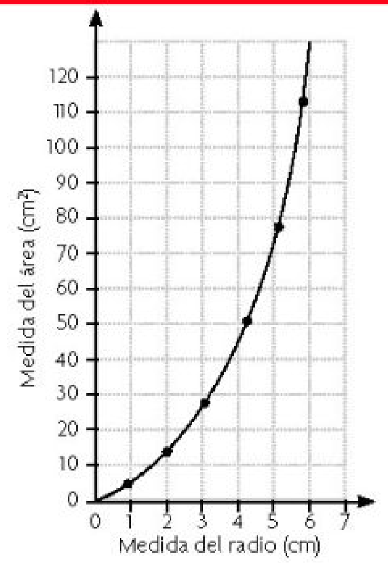
parábolas: La gráfica que se forma al representar funciones cuadráticas es una curva con forma de "U" llamada parábola, como se muestra en la gráfica 18.5. Algunos fenómenos físicos como la caída libre o la trayectoria seguida por una pelota al patearla se representan gráficamente por medio de parábolas.



Gráfica 18.5. Parábolas

Lectura de gráficas de funciones cuadráticas

1. La gráfica 18.6 representa la relación entre la medida del radio y el área del círculo.



Gráfica 18.6. Relación entre la medida del radio y el área del círculo

a) ¿Cómo es la relación entre la medida del radio y la del área del círculo: lineal o cuadrática? ________ ¿Por qué? ________

b) Si la medida del radio se encuentra entre 4 cm y 5 cm, ¿entre qué intervalo se encuentra la medida del área? ________

c) Si la medida del área se encuentra entre 30 cm² y 40 cm², ¿entre qué intervalo se encuentra la medida del radio? ________

En equipos de tres alumnos, comenten la forma en que determinaron los intervalos en los incisos *b* y *c*. ¿Es posible aplicar el mismo criterio para encontrar intervalos en cualquier otra gráfica? Justifiquen su respuesta. ________

____

¿Los intervalos que obtienen son exactos o emplean valores aproximados? ________. Expliquen por qué. ________

2. Margarita cercó tres sectores rectangulares en su terreno para sembrar en cada uno diferentes tipos de hortaliza. Los perímetros de estos sectores se muestran en la tabla 18.5.

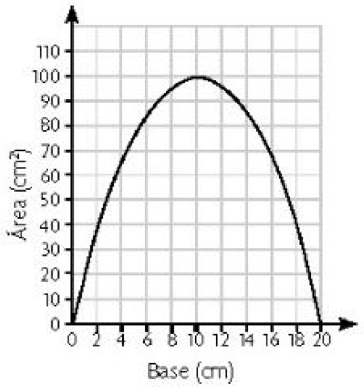
Tabla 18.5. Perímetro de los sectores rectangulares para las hortalizas

Sector	Zanahoria	Betabel	Espinaca
Perímetro	20 m	30 m	40 m

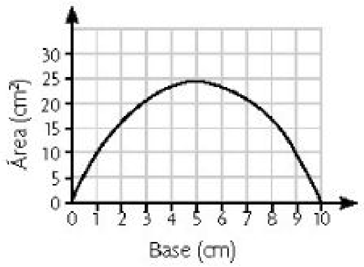
a) ¿Entre qué valores de números enteros se encuentra la medida que puede tener la base del sector rectangular en el que sembrarán zanahorias? ________
¿Y la base del sector de los betabeles? ________
¿Y la del sector de las espinacas? ________

En parejas, verifiquen sus respuestas: si la medida de la base del sector de las zanahorias está entre ________ y ________, entonces la medida de la altura está entre ________ y ________. ¿Con estas medidas es cierto que el perímetro del sector rectangular mide 20 m? ________. Justifiquen su respuesta. ________

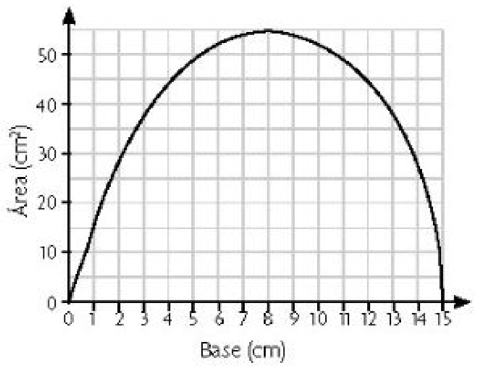
b) En las gráficas 18.7, 18.8 y 18.9, se representa la relación entre la medida que puede tener la base de cada sector y su área. Completa los incisos *i*, *ii* y *iii*.



Gráfica 18.7.



Gráfica 18.8.



Gráfica 18.9.

i) La gráfica ________ corresponde al sector de las zanahorias.

ii) La gráfica ________ corresponde al sector de los betabeles.

iii) La gráfica ________ corresponde al sector de las espinacas.

c) ¿Cuánto debe medir la base del sector de las espinacas para que el área mida 75 m²?
________ ¿Por qué? ________

d) ¿Cuánto mide la base del sector de las zanahorias cuando el área mide 21 m²? ________.

e) ¿Cuál es el área máxima que puede tener el sector de los betabeles? ________.
¿Cuánto debe medir la base? ________

¿Es cierto que cuando un sector tiene el área máxima las medidas de sus lados son iguales, es decir, se trata de un cuadrado? ________. Coméntalo con otros compañeros y justifiquen su respuesta.

3. Escribe si las siguientes afirmaciones son verdaderas (V) o falsas (F).

____ Las parábolas siempre pasan por el punto (0, 0).

____ La gráfica de toda función de la forma $y = ax^2 + bx + c$ es una parábola.

____ Las parábolas tienen una parte recta y otra curva.

____ Las parábolas son curvas.

____ Expresiones de la forma $y = ax + b$ corresponden a relaciones cuadráticas.

En equipos de tres o cuatro alumnos, comparen sus respuestas. Si hay discrepancias, pidan la guía de su maestro y lleguen a un consenso sobre qué respuestas son correctas.

El mundo en un tablero

Para mejorar tus habilidades de construcción y lectura de gráficas que modelan el movimiento de los cuerpos, visita la página:
http://proyectodescartes.org/telesecundaria/materiales_didacticos/3m_b03_t05_s01-JS/index.html en la que se grafica el movimiento de un balón al ser lanzado. (Consulta: 21 de enero de 2017.)

Identifica alguna relación entre el modelo presentado para el balón y el modelo propuesto en la sección "Jaque al rey".

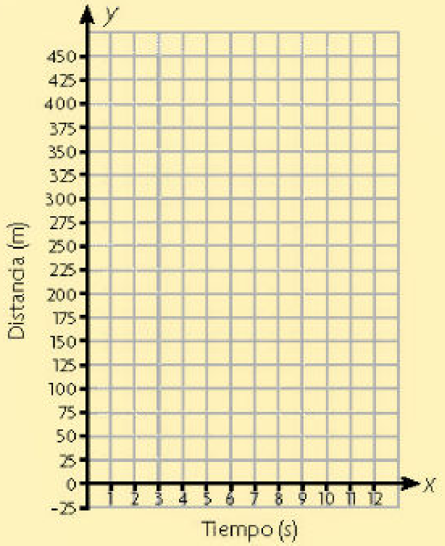
Analicemos la partida

¡Rescatada a tiempo!

En la sección "Jaque al rey" se planteó que:

- Liusa cae desde una altura de 450 m.
- La función que modela la situación de caída libre es $y = -4.9x^2 + 450$.
- x es el tiempo (cantidad de segundos) que transcurren desde que comienza la caída de Liusa
- y es la altura (cantidad de metros) a la que se encuentra Liusa del piso.

Grafica de nuevo la función $y = -4.9x^2 + 450$ en el plano cartesiano de la gráfica 18.1*a*. Corrige, si es necesario, la gráfica 18.1 que trazaste al principio de la lección.



Gráfica 18.1*a*. Representación del movimiento de caída libre de Liusa

A partir de la lectura de la gráfica 18.1*a*, contesta las preguntas:

a) Cuando $x = 1$, ¿cuántos metros ha caído Liusa? ______ ¿A qué altura se encuentra respecto al suelo? ______

b) Cuando $x = 11$, ¿cuántos metros ha caído Liusa? ______

c) A los 10 s después de haber caído, ¿Liusa ya tocó el suelo? ______

d) ¿Cuántos segundos tiene la superheroína para rescatarla? ______

e) En la gráfica 18.1*a* señala los puntos que corresponden a los momentos en que Liusa comienza a caer y en que llega al piso. Escribe sus coordenadas. ______

Con base en la gráfica 18.1*a* verifica si tu descripción de la caída de Liusa hecha a partir de la gráfica 18.1 sigue siendo adecuada.

Reúnete con dos compañeros y ofrezcan argumentos matemáticos para decidir cuál es la mejor descripción de la caída de Liusa.

19. Gráficas con secciones rectas y curvas

Contenido 3.6. Lectura y construcción de gráficas formadas por secciones rectas y curvas que modelan situaciones de movimiento, llenado de recipientes, etcétera.

Jaque al rey

Reconstrucción y análisis de un accidente automovilístico

El perito de una aseguradora debe reconstruir un accidente automovilístico. Ésta es la declaración del conductor: "Yo circulaba por la parte elevada del circuito Belisario Domínguez y pensaba tomar la rampa de salida a la altura de Matamoros. No me di cuenta del señalamiento de alto ni de los conos que impedían el paso. Derribé algunos conos y cuando frené perdí el control del vehículo; el auto saltó la barrera por el costado izquierdo de la rampa. Al chocar contra el piso se activaron las bolsas de aire y el auto quedó en posición horizontal, después continuó avanzando hasta que se detuvo en una columna de la rampa" (figura 1).

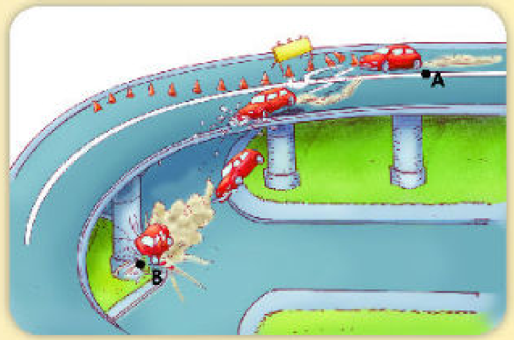
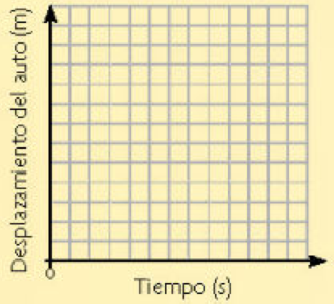


Figura 1



Gráfica 19.1. Distancia recorrida por el automóvil respecto al tiempo

Como parte del informe técnico de este caso, el perito debe incluir una gráfica de la distancia que recorre el automóvil respecto al tiempo.

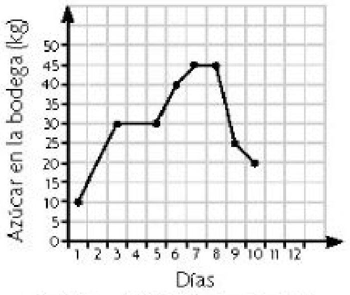
En la figura 1, los puntos *A* y *B* indican la parte inicial y final de la trayectoria del automóvil.
En la gráfica 19.1, traza un bosquejo de la distancia que recorre el automóvil respecto al tiempo. ¿La gráfica que elaboraste es precisa? ______ ¿Por qué? ______

Escribe dos observaciones relevantes que puedan inferirse a partir de la gráfica 19.1 y sean útiles para el dictamen pericial de este accidente. ______

Apertura

▶ Lectura de gráficas formadas por secciones

1. La gráfica 19.2 representa la variación de la cantidad de kilogramos de azúcar que hay en la bodega de una tienda al finalizar el día. El proveedor deja a diario 100 kg de azúcar y el producto que no se vende se almacena en la bodega.



Gráfica 19.2. Variación del azúcar en la bodega

a) ¿Cuántos kilogramos de azúcar había al finalizar el día 4? ______

b) ¿Qué sucedió con el azúcar que había en la bodega del día 3 al día 5? ______

c) ¿Qué sucedió con las ventas de azúcar entre los días 3 y 5? ______

d) ¿Cuántos kilogramos de azúcar se vendieron el día 6? ______

e) ¿Cuántos kilogramos de azúcar se vendieron el día 8? ______

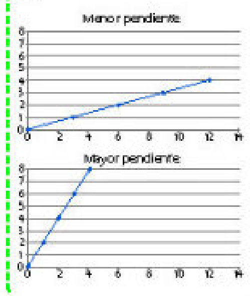
f) ¿Qué sucedió con el azúcar que había en la bodega del día 8 al día 9? ______

g) ¿Qué sucedió con las ventas de azúcar del día 8 al 9? ______

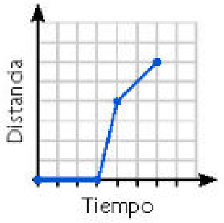
Un estudiante afirma que del día 1 al día 3 hubo más ventas porque, en esa parte de la gráfica, la pendiente es mayor. ¿Estás de acuerdo con él? Justifica tu respuesta. ______

Glosario

pendiente: es un valor que indica la inclinación de una recta respecto al eje *x*. Cuanto más vertical, mayor es la pendiente.



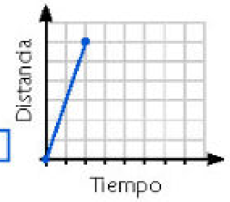
2. La gráfica 19.3 representa la relación entre el tiempo y la distancia que recorrió Micifuz una mañana.



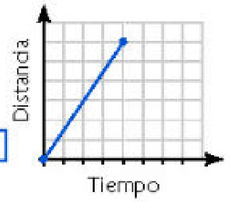
Gráfica 19.3. Distancia recorrida por Micifuz una mañana

a) Cuando corre, Micifuz avanza la misma distancia que cuando camina, pero en menos tiempo. ¿La pendiente que representa el tramo en que corre debe ser mayor o menor? ______

b) De las gráficas 19.4 y 19.5, ¿cuál representa el tramo en el que corre Micifuz? Marca la opción correcta con una ✓.



Gráfica 19.4.

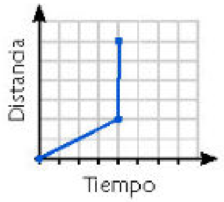


Gráfica 19.5.

c) En el recorrido de Micifuz representado en la gráfica 19.3, ¿qué representa la línea recta horizontal? ______

d) Describe el recorrido de Micifuz representado en la gráfica 19.3. ______

Carolina afirma que la gráfica 19.3 es incorrecta, porque cuando Micifuz descansa la gráfica debería ser vertical como se muestra en la gráfica 19.6.



Gráfica 19.6. Micifuz caminando y después en reposo, según Carolina

¿Estás de acuerdo con Carolina? ______. Expón tus argumentos. ______

En parejas, encierren en un círculo la palabra que complete cada enunciado de manera correcta.

- Cuando Micifuz camina la pendiente es *(mayor/menor)* que cuando corre.
- Cuando Micifuz *(descansa/camina/corre)* la pendiente es igual a 0.

3. Para llenar el recipiente A de la figura 2, se abre una llave por la que fluye una cantidad constante de agua; para llenar el recipiente B se realiza el mismo procedimiento. En la gráfica 19.7, se muestra la variación de la altura del nivel de agua en uno de los recipientes respecto al tiempo. ¿A cuál de ellos corresponde? ______. Justifica tu respuesta. ______

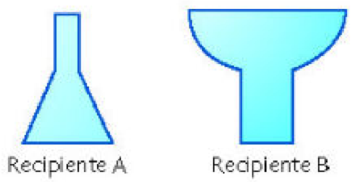
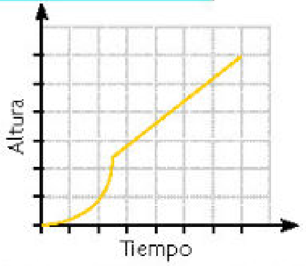


Figura 2



Gráfica 19.7. Altura del nivel del agua en un recipiente

a) Escribe si las afirmaciones son verdaderas (V) o falsas (F).

______ La altura en el nivel del agua del recipiente A aumenta primero lentamente, luego cada vez más rápido y, por último, aumenta de manera constante.

______ La altura en el nivel del agua del recipiente B aumenta primero de manera constante y luego cada vez más lento.

______ La altura en el nivel de cada recipiente aumenta de manera constante, porque el flujo de agua de la llave también es constante.

b) El recipiente A de la figura 2 se ha dividido en tres niveles como se muestra en la figura 3.

i) ¿A qué nivel le cabe menos agua? ______. Explica tu respuesta. ______

ii) ¿Qué nivel tardará más en llenarse? ______. Justifica tu respuesta. ______

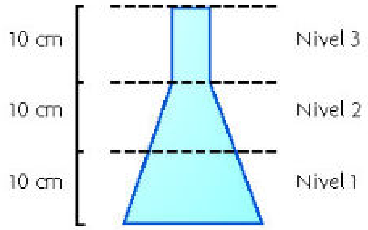


Figura 3

iii) Conforme se va llenando el nivel 2, ¿la altura aumenta de manera constante? ________ ¿Por qué? __________________________________

iv) ¿La altura en el nivel 3 aumenta de manera constante? ________ Explica por qué. __________________________________

En equipos de tres alumnos, determinen si la gráfica 19.7 corresponde al llenado del recipiente A de la figura 2.______ ¿De qué depende que al llenar un recipiente la altura del nivel del agua aumente de manera constante? __________________________________

Un alumno asegura que si no se conocen las medidas de los recipientes de la figura 2 no es posible determinar a qué recipiente corresponde la gráfica 19.7. ¿Está en lo cierto? ______ Argumenten su respuesta.

Propongan una pregunta a partir de la situación de llenado de los recipientes de la figura 2; consideren que el flujo de agua de la llave es siempre constante. Intercambien sus preguntas con otro equipo y, con la guía de su maestro, lleguen a un acuerdo sobre las respuestas correctas.

Construcción de gráficas formadas por secciones

1. En equipos analicen la figura 4, en la cual se muestra el terreno escabroso que tiene que caminar Sebastián.

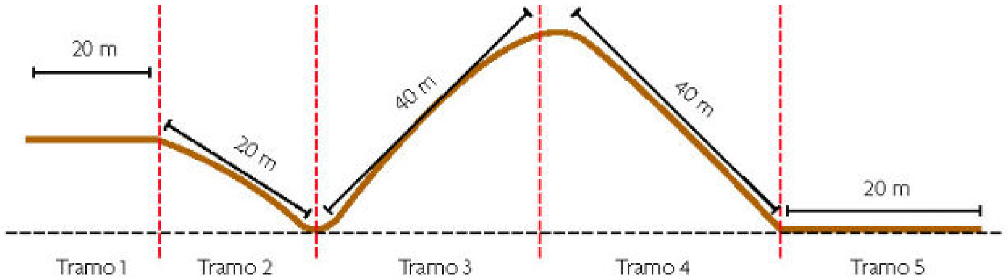


Figura 4

Consideren que:

- Cuando camina por terreno plano va a una velocidad constante de 20 m en 14 s.
- Cuando camina cuesta arriba va a una velocidad constante de 10 m en 13 s.
- Cuando camina cuesta abajo va a una velocidad constante de 30 m en 15 s.

Representen en la gráfica 19.8 la distancia recorrida por Sebastián respecto al tiempo.

a) Al graficar, ¿en qué tramo creen que la pendiente será mayor: cuando camina en terreno plano, cuando va cuesta arriba o cuando va cuesta abajo? ________________

Gráfica 19.8. Distancia que recorre Sebastián respecto al tiempo transcurrido

b) ¿En qué tramos la pendiente es menor?

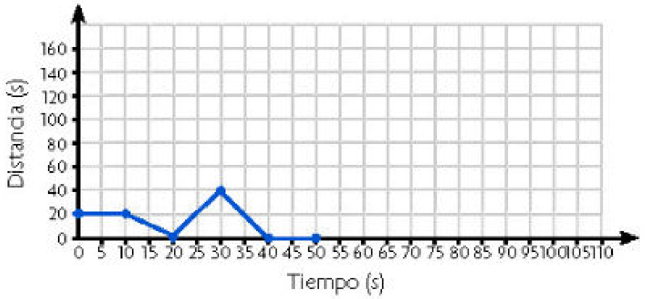
____

c) ¿Los tramos inicial y final (que deben representar la caminata en terreno plano) tienen la misma pendiente? ______________ ¿Por qué?

____

Una pareja de alumnos trazó la gráfica 19.9 para representar el recorrido de Sebastián. ¿Es correcta? Explica tu respuesta.

____

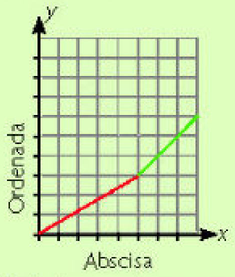


Gráfica 19.9. Recorrido de Sebastián

Verifica que la gráfica 19.8 que realizaste con tu compañero corresponda con la información del recuadro "Gráficas formadas por distintas secciones", y si es necesario corrígela.

Gráficas formadas por distintas secciones

Hay situaciones en las que la variación entre dos cantidades da lugar a una gráfica con dos o más secciones rectas. En este tipo de gráficas debe tenerse en cuenta la pendiente de cada segmento. La sección roja de la gráfica 19.10 tiene una pendiente menor que la sección verde, lo cual significa que los valores de las ordenadas (eje *y*) aumentan más lentamente en la sección roja que en la verde.



Gráfica 19.10. Distintas secciones en una sola gráfica

2. De las gráficas 19.11 y 19.12, encierra en un círculo la que corresponde a la altura del nivel del agua conforme el recipiente de la figura 5 se llena. Se sabe que de la llave sale siempre la misma cantidad de agua.

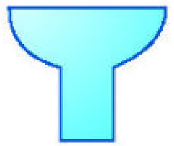
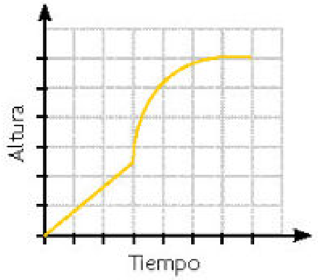
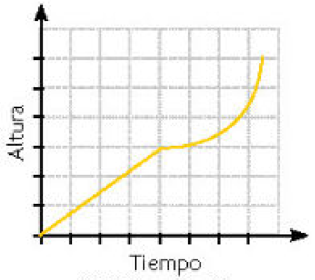


Figura 5



Gráfica 19.11



Gráfica 19.11

a) Relaciona las gráficas 19.11 y 19.12 con las descripciones siguientes y escribe el número de la gráfica en la línea correspondiente.

- Primero la altura del agua va subiendo de manera constante. Después va subiendo cada vez más rápido. ________________________
- Primero la altura del agua va subiendo de manera constante. Después va subiendo cada vez más lento. ________________________

b) De los enunciados del inciso *a*, subraya el que describa mejor la manera en que sube el nivel del agua en el recipiente de la figura 5.

c) Divide el recipiente de la figura 5 en el número de secciones que te parezca más conveniente. Contesta las preguntas y completa los enunciados siguientes.

i) ¿A cuál nivel le cabe menos agua? ____________________

ii) ¿Cuál nivel tardará más en llenarse? ____________________

iii) Conforme se va llenando el nivel ________________ la altura del nivel del agua aumenta de manera constante.

iv) Conforme se va llenando el nivel ________________ la altura del nivel del agua aumenta cada vez más lento.

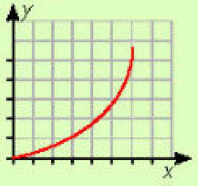
Si a medida que se va llenando cierta sección de un recipiente la altura aumenta cada vez más lento, ¿hacia dónde abre la curva que representa esa parte del llenado: hacia arriba o hacia abajo? __________. ¿Por qué? ____________________

Verifica que tus respuestas a esta actividad correspondan con la información del recuadro "Gráficas con secciones curvas". Si lo crees pertinente, corrígelas.

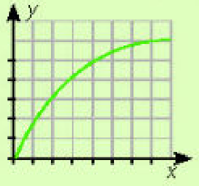
Gráficas con secciones curvas

Existen situaciones en las que la variación entre dos cantidades da lugar a una gráfica con dos o más secciones que pueden ser rectas o curvas. Como ya viste, en las secciones rectas hay que tener en cuenta la pendiente, y en las curvas hay que analizar hacia dónde abren.

La gráfica 19.13 muestra que primero hay un aumento lento de la ordenada (eje *y*) y luego un aumento rápido, mientras que en la gráfica 19.14 primero ocurre un aumento rápido de la ordenada y después un aumento lento.



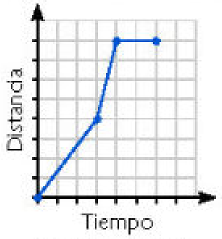
Gráfica 19.13



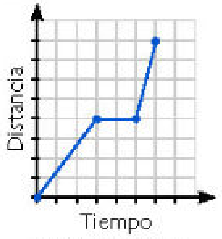
Gráfica 19.14

3. Relaciona con una línea la gráfica que corresponde a cada situación.

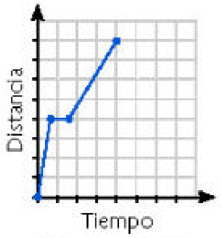
- Micifuz corre hacia el parque durante unos minutos. Cuando llega, se echa a descansar un rato. Luego, vuelve a su casa caminando tranquilamente.
- Micifuz camina hacia el parque durante unos minutos. Cuando llega, se echa a descansar hasta que llega un perro enorme que lo asusta y sale corriendo.
- Micifuz camina hacia el parque durante unos minutos. Después, ve una paloma y corre a atraparla. Finalmente, llega al parque y se echa un rato a la sombra.



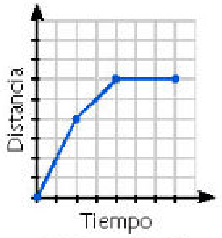
Gráfica 19.15



Gráfica 19.16



Gráfica 19.17



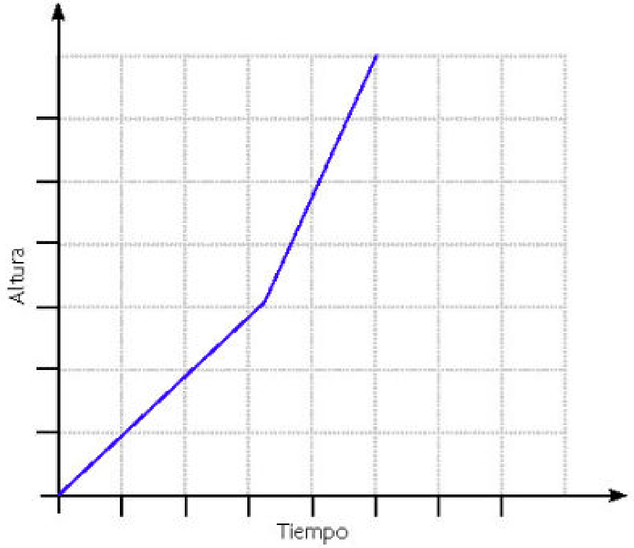
Gráfica 19.18

Hay cuatro gráficas y sólo tres descripciones de los recorridos de Micifuz. Escribe la descripción de un posible recorrido correspondiente a la gráfica que quedó sin relacionar. ____________________

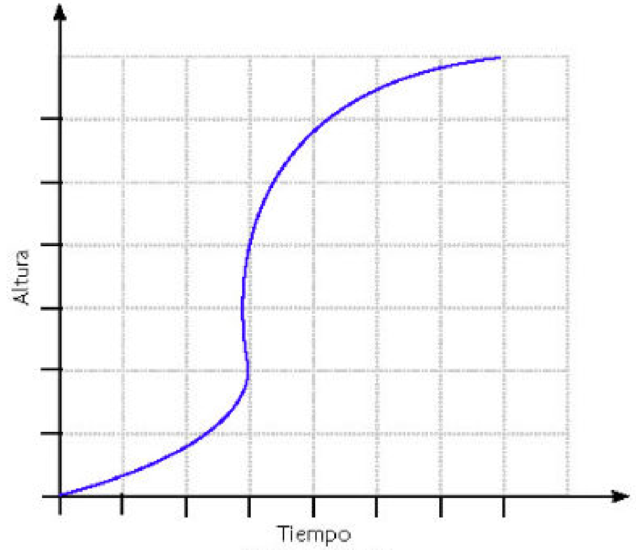
____

Intercambia tu descripción con la de un compañero y compárenlas. ¿Son similares? ________
¿Por qué? ____________________
Verifiquen que efectivamente describan lo que representa la gráfica.

4. Las gráficas 19.19 y 19.20 describen el llenado de recipientes. En parejas, dibujen un recipiente para cada gráfica.



Gráfica 19.19



Gráfica 19.20

¿Una gráfica con dos o más secciones rectas modela el llenado de un recipiente que sólo tiene secciones rectas? ______. ¿De qué forma pueden ser dichas secciones? ______.

En una gráfica con secciones curvas, ¿el nivel del agua aumenta de manera constante o variable? ______. ¿Qué formas pueden tener los recipientes que se llenan así? ______.

5. Trabajen en equipos de tres alumnos. Sigan las instrucciones.

- Cada quien dibuje un recipiente y su gráfica de llenado.
- En una hoja aparte dibujen el recipiente sin la gráfica y entréguenla a otro compañero, de manera que todos tengan el dibujo que haya hecho de alguien más.
- Elabore cada quien una gráfica que modele el llenado del recipiente que recibió.

Una vez trazadas las gráficas muéstrenlas a todo el equipo y compárenlas con las dibujadas originalmente. Comenten cuál de las gráficas representa correctamente el cambio de la altura del nivel del agua en cada recipiente y lleguen a una conclusión.

¿Es posible que a un mismo recipiente corresponda más de una gráfica? ______. ¿Por qué? ______.
¿Es posible que a una misma gráfica le corresponda más de un recipiente? ______.

Expliquen su respuesta. ______.

Si un recipiente tiene partes que son prismas rectangulares o cilindros, ¿cómo debe ser ese tramo en la gráfica? ______. ¿Por qué? ______.

Si un recipiente tiene partes que son curvas o prismas distintos a los rectangulares, ¿cómo debe ser ese tramo en la gráfica? ______.

Si hay tramos curvos en la gráfica, ¿hacia dónde deben abrir? ______.

El mundo en un tablero

Para mejorar tus habilidades de lectura y construcción de gráficas por secciones, visita el sitio: http://proyectodescartes.org/Telesecundaria/materiales_didacticos/3m_b03_t07_s01-JS/index.html (Consulta: 21 de enero de 2017.)
En este link se explora el llenado de recipientes y otras situaciones que se modelan mediante gráficas formadas por secciones.
Encuentra una situación, distinta de las mostradas en el sitio, que pueda ser descrita por medio de gráficas con secciones rectas y curvas y escríbela aquí: ______.

Analicemos la partida

Reconstrucción y análisis de un accidente automovilístico

En la figura 1.*a* se muestra la trayectoria del auto accidentado. A diferencia de la figura 1, aquí se han señalado tres secciones distintas en la trayectoria.

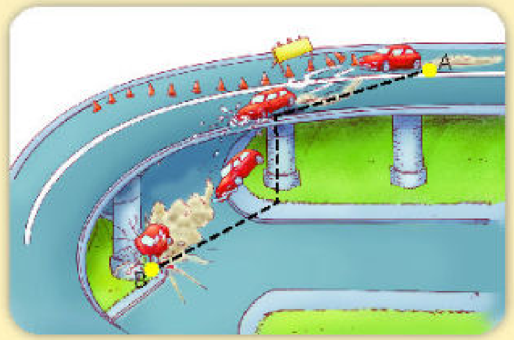


Figura 1.*a*

a) ¿Por qué se ha dividido la trayectoria en tres secciones? ______.

b) ¿Cómo deben ser las secciones de la gráfica que representan la parte en la que el coche está avanzando: rectas o curvas? ______. ¿Por qué? ______.

c) ¿Cómo debe ser la sección de la gráfica que representa la caída del coche: recta o curva? Justifica tu respuesta. ______.

e) Revisa que la gráfica 19.1 que trazaste al principio de la lección corresponda a las respuestas de las preguntas anteriores. Si es necesario, haz las correcciones pertinentes consultando la información de los recuadros "Gráficas formadas por distintas secciones" y "Gráficas con secciones curvas".

Escribe por lo menos dos características que deben tener las situaciones que se representan mediante gráficas con secciones rectas y curvas. ______. ¿Las situaciones abordadas en esta lección tienen las características que escribiste? ______. ¿Cuáles? ______.

20. Eventos independientes

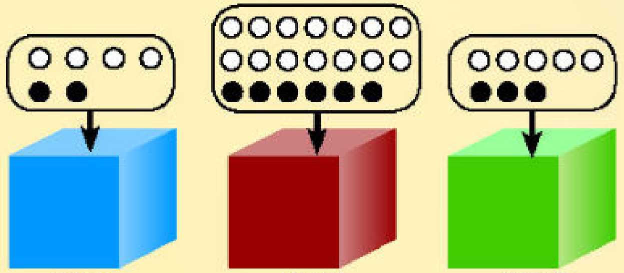
Contenido 3.7. Cálculo de la probabilidad de ocurrencia de dos eventos independientes (regla del producto).

Jaque al rey

Cuando la intuición no siempre es buena consejera

En un programa de concursos organizaron el siguiente juego.

En presencia del participante se meten en cada urna las canicas mostradas arriba y se revuelven (figura 1). El participante elige una urna y saca una canica. Luego escoge otra urna y saca también una canica. Si las dos canicas que saca son negras, gana un premio.


Urna A
Urna B
Urna C
Figura 1

¿Qué urnas le conviene elegir? ______________. Justifica tu respuesta. ______________

____

¿Por qué razón no le conviene elegir la otra urna? ______________________________

____

En las urnas elegidas, ¿cuál es la probabilidad del evento "Obtener canica negra en la primera urna y obtener canica negra en la segunda urna"? ______________________

¿Cuál es la probabilidad de que ninguna de las dos canicas sea negra? ______________

Apertura

Probabilidad de eventos independientes

1. Diana y Lola tomaron cartas de una baraja inglesa (figura 2) y con ellas formaron un mazo que revolvieron. Sin ver, Diana sacó una carta, vio la figura, luego devolvió la carta al mazo y lo barajeó. A continuación, repitió el procedimiento para extraer una segunda carta. Después, Lola hizo dos extracciones siguiendo el mismo procedimiento que Diana. La ganadora será quien obtenga ases en las dos extracciones.


Rey de corazones
As de corazones
Rey de espadas
As de espadas
Figura 2

a) ¿Cuál es la probabilidad de ganar en este juego? ______________

b) ¿Cuál es la probabilidad de obtener as de corazones y rey de espadas? ______________

c) ¿Qué es más probable obtener en las dos extracciones: ases de corazones, o un as de corazones y el otro de espadas? ______________ ¿Por qué? ______________

____

d) ¿Cómo completarías el esquema de la figura 3 para determinar el espacio muestral de este juego?

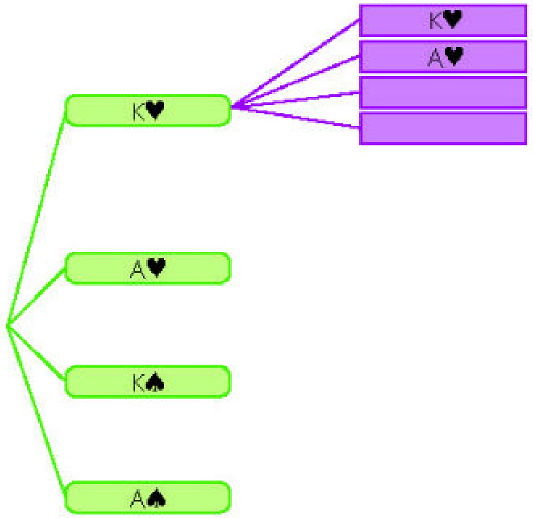


Figura 3

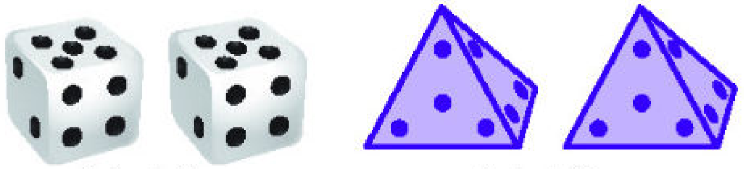
Glosario

espacio muestral: conjunto de resultados posibles en un experimento.

Emplea el espacio muestral que obtuviste en el inciso *d* para verificar tus respuestas.

La regla del producto

2. Diana y Marco juegan con dados; ella tiene dos dados de cuatro caras y él dos de seis caras (figura 4). Cada quien tira sus dos dados (un dado después del otro). Gana el que obtenga el número 3 en ambos lanzamientos.


Dados de Marco
Dados de Diana
Figura 4

a) Responde las preguntas considerando los lanzamientos que hace Marco con sus dados.

i) ¿Cuántos resultados posibles existen cuando Marco hace sus dos lanzamientos? ______

ii) ¿Cuál es la probabilidad de que obtenga 3 en el primer lanzamiento? ______

iii) ¿Cuál es la probabilidad de que obtenga 3 en el segundo lanzamiento? ______

iv) ¿Cuál es la probabilidad de que Marco gane, es decir, que obtenga 3 en ambos lanzamientos? ______

b) Responde las preguntas considerando los lanzamientos que hace Diana con sus dados.

i) ¿Cuántos resultados posibles existen cuando Diana hace sus dos lanzamientos? ______

ii) ¿Cuál es la probabilidad de que obtenga 3 en el primer lanzamiento? ______

iii) ¿Cuál es la probabilidad de que obtenga 3 en el segundo lanzamiento? ______

iv) ¿Cuál es la probabilidad de que Diana gane el juego? ______

c) ¿Quién tiene mayor probabilidad de ganar? ______

d) El esquema de la figura 5 corresponde a los resultados posibles de lanzar los dos dados de Marco. En el primer lanzamiento la probabilidad de obtener alguno de los números 1, 2, 3, 4, 5 o 6 es $\frac{1}{6}$.

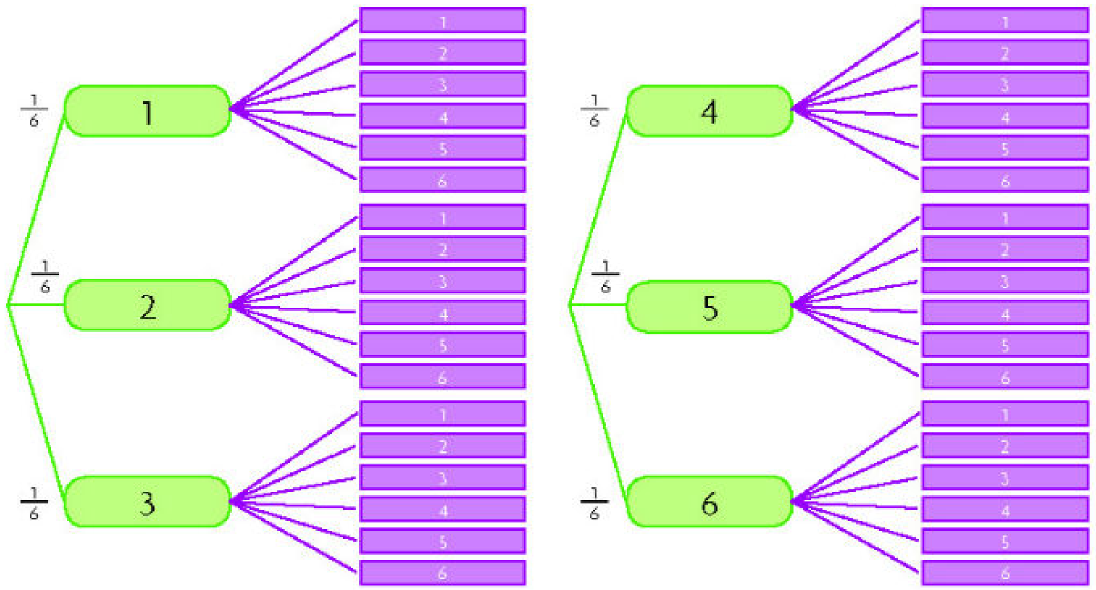


Figura 5

i) De acuerdo con la figura 5, si cayó 1 en el primer lanzamiento, ¿cuál es la probabilidad de obtener 1 en el segundo lanzamiento? ______

ii) Si cayó 1 en el primer lanzamiento, ¿cuál es la probabilidad del evento "Obtener números iguales"? ______

¿En el punto *i* del inciso *d* los eventos son independientes? ______ ¿Y en el inciso *ii*? ______ Justifica tu respuesta. ______

Reúnete con dos compañeros, analicen sus respuestas y anoten una conclusión en su cuaderno.

Calculen la probabilidad de los siguientes eventos con los dados de Marco. Usen el esquema de la figura 5 para verificar los resultados.

- "Obtener 2 en el primer lanzamiento y 4 en el segundo". ______
- "Obtener un 4 y un 5". ______
- "Obtener números mayores que 3 en ambos lanzamientos". ______
- "Obtener un número impar en el primer lanzamiento y 6 en el segundo". ______

3. En parejas, consideren el juego planteado en la actividad 2 en el que Marco tira sus dos dados —uno después del otro— y analicen las situaciones.

a) Si A es el evento "Obtener 2 en el primer lanzamiento", calculen la probabilidad de ocurrencia P(A). ______

Si B es el evento "Obtener 4 en el segundo lanzamiento", determinen la probabilidad de ocurrencia P(B). ______

Consideren la ocurrencia de los eventos A y B, es decir, "Obtener 2 en el primer lanzamiento y obtener 4 en el segundo lanzamiento". Calculen la probabilidad de ocurrencia P(A y B). ______

b) Consideren los siguientes eventos:

A: "Obtener 4 o 5 en el primer lanzamiento".

B: "Obtener 4 o 5 en el segundo lanzamiento".

A y B: "Obtener un 4 y 5 al hacer los dos lanzamientos".

Con ayuda del esquema de la figura 5 determinen:

P(A) = ______ P(B) = ______ P(A y B) = ______

c) Analicen los eventos:

A: "Obtener un número mayor que 3 en el primer lanzamiento".

B: "Obtener un número mayor que 3 en el segundo lanzamiento".

Escriban un enunciado para el evento A y B: ______

Calculen:

P(A) = ______ P(B) = ______ P(A y B) = ______

d) Consideren los eventos:

A: "Obtener un número impar en el primer lanzamiento".

B: "Obtener 6 en el segundo lanzamiento".

Enuncien el evento A y B: ______

Determinen:

P(A) = ______ P(B) = ______ P(A y B) = ______

¿Los eventos en cada inciso de esta actividad son independientes? ______ ¿Por qué? ______ ¿Qué significa decir que dos eventos A y B sean independientes? ______

Si A y B son eventos independientes, ¿existe alguna relación entre P(A), P(B) y P(A y B)? Argumenten su respuesta. ______

Regla del producto

Al multiplicar las probabilidades de dos eventos independientes, P(A) × P(B), se obtiene la probabilidad P(A y B) de los eventos A y B.

Por ejemplo, la probabilidad del evento "Obtener 2 en el primer lanzamiento" es $\frac{1}{6}$ y la probabilidad del evento "Obtener 4 en el segundo lanzamiento" es nuevamente $\frac{1}{6}$. El que ocurra un evento no afecta la ocurrencia o no ocurrencia del otro, por esta razón son independientes. La probabilidad del evento "Obtener 2 en el primer lanzamiento y obtener 4 en el segundo lanzamiento" puede calcularse mediante la regla del producto: $(\frac{1}{6})(\frac{1}{6}) = \frac{1}{36}$.

Con la información del recuadro "Regla del producto", revisen las respuestas que dieron y lleguen a un consenso sobre la validez de sus conclusiones. ¿Consideran que la regla del producto es útil al resolver este tipo de problemas? ______ ¿Por qué? ______

4. De la actividad 2, considera los dados en forma de tetraedro de Diana. Recuerda que se lanza un dado a continuación del otro.

a) Calcula la probabilidad de que ocurran los siguientes eventos. Elabora un esquema para verificar tus respuestas.

A: "Obtener 4 en el primer lanzamiento y 4 en el segundo". ______

B: "Obtener números cuya suma sea 4". ______

C: "Obtener números pares en ambos lanzamientos". ______

D: "Obtener un número par y un número impar". ______

b) Analiza los eventos planteados en cada caso y realiza los cálculos correspondientes.

i) A: "Obtener 4 en el primer lanzamiento". P(A) = ______

B: "Obtener 4 en el segundo lanzamiento". P(B) = ______

Enuncia el evento A y B. ______

Calcula P(A y B). ______

ii) A: "Obtener 1, 2 o 3 en el primer lanzamiento". P(A) = ______

B: "Obtener 3, 2 o 1 en el segundo lanzamiento". P(B) = ______

Enuncia el evento A y B: ______

Determina P(A y B). ______

iii) A: "Obtener un número par en el primer lanzamiento". P(A) = ______

B: "Obtener un número par en el segundo lanzamiento". P(B) = ______

Enuncia el evento A y B: ______

Calcula P(A y B). ______

iv) A: "Obtener un número par o un número impar en el primer lanzamiento". ______

B: "Obtener un número par o un número impar en el segundo lanzamiento". ______

Enuncia el evento A y B: ______

Calcula P(A y B). ______

Un estudiante afirma que no en todos los casos del ejercicio 4 se puede aplicar la regla del producto. ¿Estás de acuerdo con él? ______ ¿En qué casos sí se aplica y en cuáles no? Coméntalo con otro compañero y escriban sus conclusiones. ______

5. Toma uno de los casos anteriores del ejercicio 4 y analízalo con mayor detalle. Según el esquema de los dados de Diana, ¿cuántos resultados posibles hay para el evento "Obtener un número par y un número impar"? ______ Escríbelos: ______

Si en el primer lanzamiento cae 1 o 3, ¿qué números deben caer en el segundo? ______ ¿Estos eventos son independientes? ______

Explica tu respuesta. ______

Andrea está segura de que la probabilidad del evento "Obtener números cuya suma sea 4" es $\frac{9}{16}$, porque si:

A: "Obtener 1, 2 o 3 en el primer lanzamiento". P(A) = $\frac{3}{4}$.

B: "Obtener 3, 2 o 1 en el segundo lanzamiento". P(B) = $\frac{3}{4}$.

A y B: "Obtener 1, 2 o 3 en el primer lanzamiento y obtener 3, 2 o 1 en el segundo". P(A y B) = $\frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{16}$.

Sin embargo, la respuesta de Andrea es incorrecta. Explica por qué. ______

6. Se hace girar la ruleta mostrada en la figura 6 y cuando se detiene se marca el color que apunta la flecha. Luego se hace girar una segunda y una tercera vez.

Determina la probabilidad de los siguientes eventos.

Figura 6

i) Probabilidad del evento "Obtener rojo en los tres giros". ______

ii) Probabilidad del evento "Obtener blanco en dos giros y rojo en uno". ______

iii) Probabilidad del evento "Obtener rojo, blanco, rojo, en ese orden". ______

iv) ¿En cuáles de estos eventos puede utilizarse la regla del producto para calcular su probabilidad? ______

Para calcular la probabilidad de un evento en el que se hace girar la ruleta de la figura 6, Ivonne utilizó la regla del producto obteniendo correctamente $\frac{1}{6}$. ¿De qué evento o qué eventos puede tratarse? ______

Analicemos la partida

Cuando la intuición no siempre es buena consejera

a) En la urna azul de la sección "Jaque al rey", ¿cuál es la probabilidad del evento "Obtener una canica negra"? ______

b) En la urna roja, ¿cuál es la probabilidad del evento "Obtener una canica negra"? ______

c) ¿Y en la verde? ______

d) ¿Cuáles urnas conviene elegir? ______

e) Verifica tu respuesta con ayuda de los siguientes puntos.

i) Probabilidad del evento "Obtener una canica negra en la urna azul y una canica negra en la urna roja". ______

ii) Probabilidad del evento "Obtener una canica negra en la urna azul y una canica negra en la urna verde". ______

iii) Probabilidad del evento "Obtener una canica negra en la urna roja y una canica negra en la urna verde". ______

Con el experimento de las urnas plantea un caso donde los eventos sean independientes y otro en el que no lo sean. ______

Más que doblado de papel

SITUACIÓN 1

En la clase de origami, el maestro les pide a sus alumnos una hoja de forma rectangular cuyo largo mida el doble del ancho.

Pregunta 1: Juan Martín dobla una de las esquinas de su hoja hacia el lado opuesto como se muestra en la figura 1.

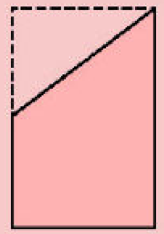


Figura 1

Si el área de la figura 1 mide 54 cm², ¿cuál es el área de la hoja original?

Crédito total: Da la respuesta correcta. Existen varias estrategias posibles para resolver el problema y elige al menos una correcta.
Crédito parcial: Su estrategia es correcta, pero comete un error en los cálculos.
Sin crédito: Usa una estrategia incorrecta.

Pregunta 2: ¿Cuáles son las longitudes de los lados de la hoja original?

Crédito total: Da la respuesta correcta.
Crédito parcial: Plantea la ecuación correctamente, pero se equivoca al resolverla o confunde la solución de la ecuación con la del problema
Sin crédito: Comete los dos errores mencionados antes o usa un planteamiento incorrecto.

Pregunta 3: Alicia dobla la hoja como se ve en la figura 2.

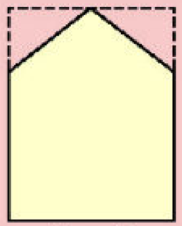


Figura 2

Si el área de la figura 2 es de 28 cm², ¿cuál es la longitud de los lados del rectángulo original?

Crédito total: Da la respuesta correcta.
Crédito parcial: Plantea la ecuación correctamente, pero se equivoca al resolverla o confunde la solución de la ecuación con la del problema
Sin crédito: Comete los dos errores mencionados antes o usa un planteamiento incorrecto.

Pregunta 4: Lorenzo usa también una hoja rectangular con las características indicadas por el maestro. Le añade otro rectángulo a la hoja original con uno de sus lados de 2 cm, como se muestra en la figura 3.

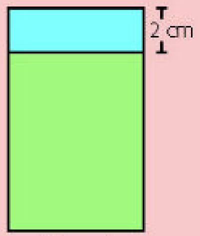


Figura 3

Si el área del nuevo rectángulo (azul y verde) es de 60 cm², ¿cuál es la longitud de los lados del rectángulo original (verde)?

Crédito total: Da la respuesta correcta y justificada.
Crédito parcial: Plantea la ecuación correctamente, pero se equivoca al resolverla o confunde la solución de la ecuación con la del problema.
Sin crédito: Comete los dos errores mencionados antes o usa un planteamiento incorrecto.

El arte del georigami

SITUACIÓN 2

Continuando con el doblado de papel, Jaime tomó una hoja rectangular y la dobló de cada extremo, como se observa en la figura 4.

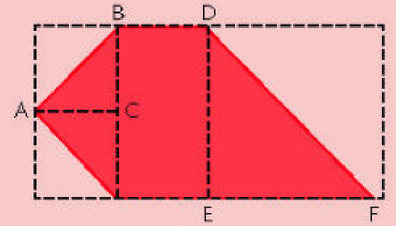


Figura 4

Pregunta 1: ¿Los triángulos *ABC* y *DEF* son semejantes? Explica tu respuesta.

Crédito total: Da la respuesta correcta argumentando el criterio utilizado.
Sin crédito: No da la respuesta correcta.

Pregunta 2: Si la longitud del segmento $\overline{AB}$ es de 3.2 cm, ¿cuál es la longitud del segmento $\overline{DF}$?

Crédito total: Da la respuesta correcta. Existen varias estrategias posibles para contestar la pregunta.
Crédito parcial: Su estrategia es correcta, pero comete un error en los cálculos.
Sin crédito: Usa una estrategia incorrecta.

Un patrón con estilo

SITUACIÓN 3

Susana va a confeccionar un *patchwork* (figura 5) con retazos de tela que le regaló su mamá.

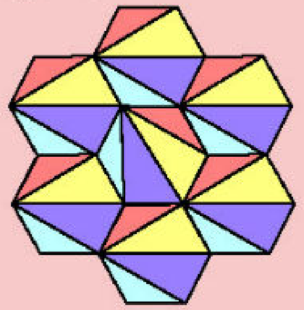


Figura 5

La figura 5 está formada por un patrón de hexágonos regulares divididos en cuatro triángulos de diferentes colores (figura 6).

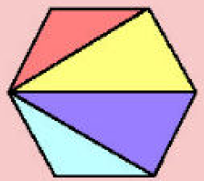


Figura 6

Pregunta 1: ¿Los triángulos rojo y azul son semejantes? Justifica tu respuesta dando argumentos matemáticos.

Crédito total: Da la respuesta correcta argumentando el criterio utilizado.
Crédito parcial: Su estrategia es correcta, pero no justifica por completo el criterio utilizado.
Sin crédito: No da la respuesta correcta.

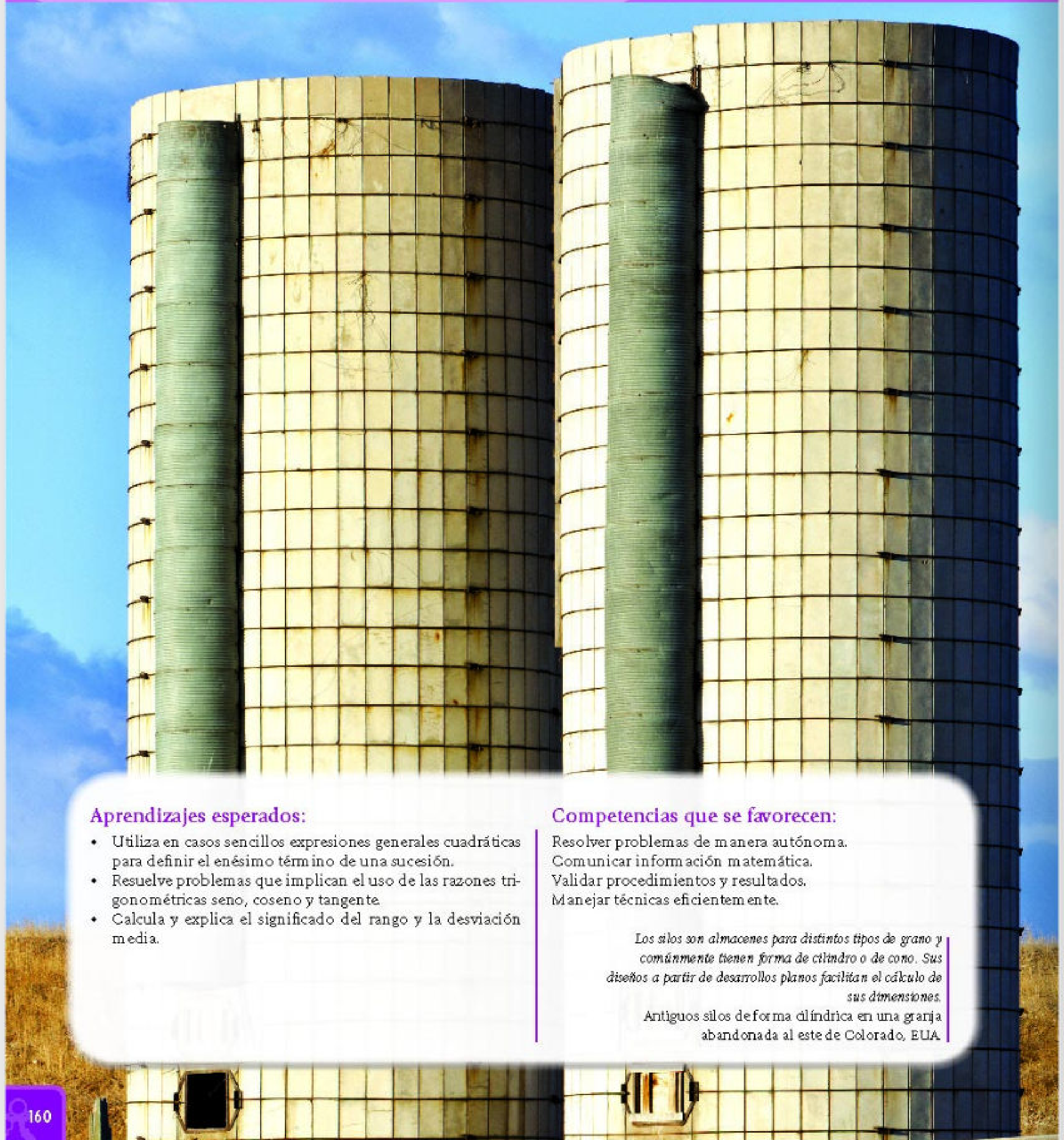
Pregunta 2: ¿Los triángulos amarillo y morado son semejantes? Justifica tu respuesta con argumentos matemáticos.

Crédito total: Da la respuesta correcta argumentando el criterio utilizado.
Crédito parcial: Su estrategia es correcta, pero no justifica por completo el criterio utilizado.
Sin crédito: No da la respuesta correcta.

Pregunta 3: ¿Los triángulos rojo y amarillo son semejantes? Justifica tu respuesta con argumentos matemáticos.

Crédito total: Da la respuesta correcta argumentando por qué no son semejantes.
Sin crédito: No da la respuesta correcta.

Bloque 4



Aprendizajes esperados:

- Utiliza en casos sencillos expresiones generales cuadráticas para definir el enésimo término de una sucesión.
- Resuelve problemas que implican el uso de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente.
- Calcula y explica el significado del rango y la desviación media.

Competencias que se favorecen:

Resolver problemas de manera autónoma.
Comunicar información matemática.
Validar procedimientos y resultados.
Manejar técnicas eficientemente.

Los silos son almacenes para distintos tipos de grano y comúnmente tienen forma de cilindro o de cono. Sus diseños a partir de desarrollos planos facilitan el cálculo de sus dimensiones.

Antiguos silos de forma cilíndrica en una granja abandonada al este de Colorado, EUA.

21. Expresiones cuadráticas de sucesiones

Contenido 4.1. Obtención de una expresión general cuadrática para definir el enésimo término de una sucesión.

Jaque al rey

Pilas *in crescendo*

En una fábrica de tubos de cobre la producción diaria se almacena en una bodega formando pilas triangulares cada vez más altas, tal como se muestra en la figura 1.

Pila 1 | Pila 2 | Pila 3 | Pila 4

Figura 1

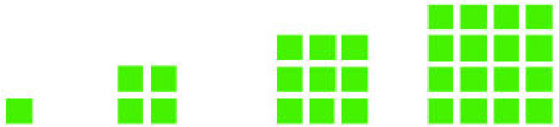
¿Cuántos tubos habrá en la pila 20? ____________
¿Cuántos tubos habrá en la pila *n*? ____________
Si en determinado momento se han producido 192 tubos, ¿es posible acomodarlos en una pila que continúe la misma sucesión geométrica de la figura 1? ____________. ¿Por qué? ____________

Escribe una expresión algebraica para hallar la cantidad de tubos en cualquier número de pila. ____________

Apertura

▶ **Sucesiones**

1. En la figura 2 se muestran los primeros desarrollos de un patrón geométrico basado en arreglos de cuadrados.



Arreglo 1 | Arreglo 2 | Arreglo 3 | Arreglo 4

Figura 2

a) ¿Cuál es la diferencia entre el número de cuadrados del arreglo 1 y el número de cuadrados del arreglo 2? ______________ ¿Y la diferencia entre los del arreglo 2 y el arreglo 3? ______________

b) ¿Es constante la diferencia entre el número de cuadrados de los arreglos 1 y 2, y la diferencia que hay entre el número de cuadrados de los arreglos 2 y 3? ______________

c) ¿Cuántos cuadrados tendrá el arreglo 5? ______________

En parejas, analicen mediante qué procedimiento matemático pueden llegar a una expresión con la que se encuentre el número de cuadrados de cualquier arreglo. Después contrasten sus propuestas con las de otras parejas y prueben la eficacia de cada una.

2. ¿Cómo completarías la tabla 21.1 a partir de la sucesión de cuadrados de la figura 2 en la actividad anterior?

Tabla 21.1. Sucesión de cuadrados en los arreglos de la figura 2

Término *n*	Núm. de cuadrados en la base	Núm. de niveles en la altura	Total de cuadrados en el arreglo
5			
10			
n			

a) ¿Qué significa la palabra *término* utilizada en la tabla 21.1 en el contexto de este problema? ______________

¿Y qué representa en un contexto general? ______________

b) ¿Qué relación existe entre la medida de la base de cierto arreglo y la posición que ocupa en la sucesión? ______________

c) Comparada con la medida de la base, ¿cuántos niveles tiene la altura de cualquier arreglo de esta sucesión? Exprésalo en términos de *n*. ______________

d) Completa la expresión que permite encontrar el número de cuadrados de cualquier arreglo que pertenezca a esta sucesión. $n \times$ ______ = total de cuadrados en el arreglo.

e) Simplifica la expresión que encontraste en el inciso *d*. ______________

¿Habrá algún arreglo que tenga 2 116 cuadrados? Si existe, ¿qué lugar le corresponde en la sucesión? Explica tu respuesta. ______________

3. Completa la tabla 21.2 a partir de la sucesión de arreglos geométricos de la figura 3.

Figura 3

Tabla 21.2. Sucesión de cuadrados en los arreglos de la figura 3

Término *n*	Núm. de cuadrados en la base	Núm. de niveles en la altura	Total de cuadrados en el arreglo
5			
10			
n			

a) ¿Qué relación existe entre la medida de la base de cierto arreglo y la posición que ocupa en la sucesión? ______________

b) ¿Cuántos cuadrados tiene la base de cualquier arreglo que pertenezca a esta sucesión? ______________

c) Comparada con la medida de la base, ¿cuántos niveles tiene la altura de cualquier arreglo de esta sucesión? Exprésala en términos de *n*. ______________

d) Completa la expresión para encontrar el número de cuadrados de cualquier arreglo que pertenezca a esta sucesión: $n \times$ ______ = total de cuadrados en el arreglo.

e) Simplifica la expresión que encontraste en el inciso *d*. ______________

¿Habrá algún arreglo con 289 cuadritos? ¿Qué lugar ocupará en la sucesión? Justifica tu respuesta. ______________

¿Qué clase de expresión algebraica encontraste en el inciso *e*? ______________

Expresión general cuadrática de una sucesión

4. En equipos de tres alumnos, analicen la sucesión de arreglos triangulares de la figura 4.

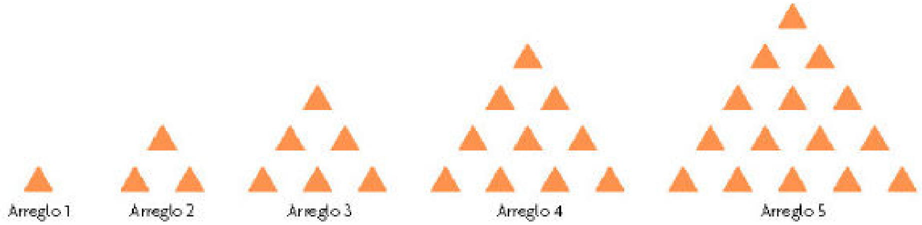


Figura 4

a) ¿Cuántos triángulos habrá en el arreglo 6? ______________

b) ¿Y en el arreglo 20? ______________

c) Analicen los arreglos de triángulos y cuadrados de la figura 5.

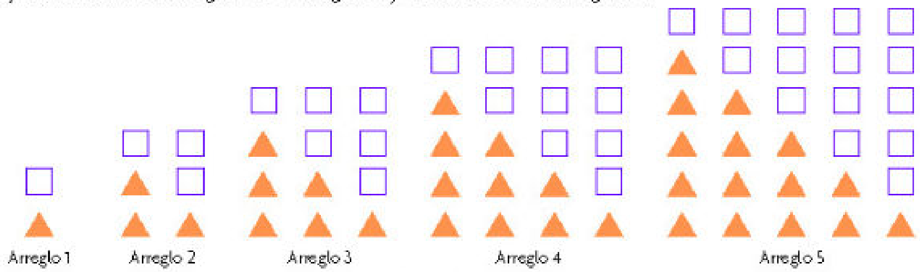


Figura 5

¿La cantidad de triángulos en los arreglos de la figura 5 es la misma que la de los arreglos de la figura 4? ______

d) Completen la tabla 21.3 considerando la sucesión mostrada en la figura 5 y contesten las preguntas que se plantean.

Tabla 21.3. Sucesión de triángulos y cuadrados en los arreglos de la figura 5

Término *n*	Núm. de triángulos en la base	Núm. de niveles en la altura	Total de triángulos y cuadrados en el arreglo
6			
20			
n			

i) En la figura 5, ¿qué relación existe entre la medida de la base de cada arreglo y la posición que ocupa en la sucesión? ______

ii) ¿Cuántos triángulos tiene la base de cualquier arreglo que pertenezca a esta sucesión? ______

iii) En relación con la medida de la base, ¿cuántos niveles tiene la altura de cualquier figura que pertenece a la sucesión de la figura 5? ______

iv) Escribe una expresión algebraica que sirva para determinar el número de triángulos y cuadrados en el arreglo *n* de la sucesión. ______

e) Analicen los arreglos de la figura 6.

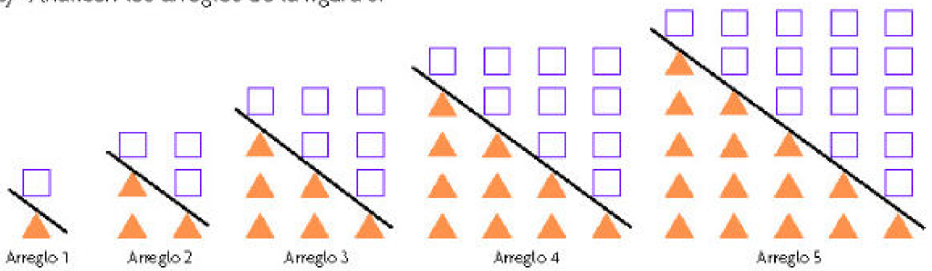


Figura 6

i) Observen lo que ocurre al dividir cada uno de los arreglos formados por triángulos y cuadrados. ¿En cada sección de los arreglos hay la misma cantidad de triángulos que de cuadrados? ______

ii) Escriban una expresión general de la cantidad de triángulos que hay en el arreglo *n* de la sucesión de la figura 6. ______

f) Escriban una expresión general de la cantidad de triángulos que hay en el arreglo *n* de la sucesión de la figura 6. ______

El propósito de esta actividad es encontrar una expresión algebraica para la cantidad de triángulos que hay en el arreglo *n* de la figura 6. Reflexionen y escriban en su cuaderno los pasos que siguieron para encontrar dicha expresión algebraica.

¿Consideran que hay algún "truco" matemático para resolver este problema? ______

¿Cuál es dicho "truco"? ______

¿La expresión algebraica que obtuvieron es cuadrática? ______

Expliquen por qué. ______

5. Reúnete con tres compañeros y analicen la sucesión de arreglos geométricos de la figura 7.

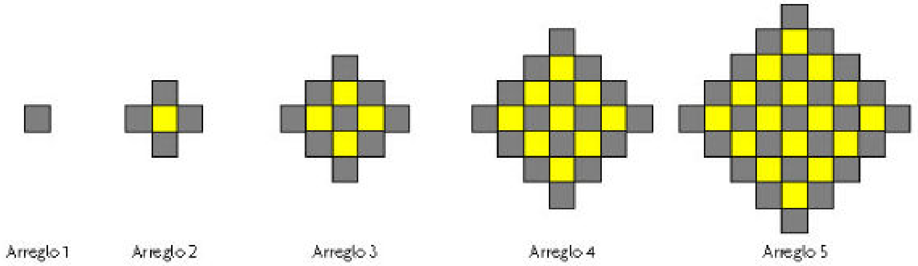


Figura 7

a) ¿Cómo completarían la tabla 21.4 considerando la sucesión mostrada en la figura 7?

Tabla 21.4. Sucesión de cuadrados grises y amarillos en los arreglos de la figura 7

Término *n*	Núm. de cuadrados grises	Núm. de cuadrados amarillos	Total de cuadrados grises y amarillos
6			
25			
n			

b) ¿Qué relación existe entre el número de cuadrados grises de cada arreglo y la posición que ocupa en la sucesión? ______

c) Expresen el número de cuadrados grises que hay en cada arreglo en términos de *n*.

Total de cuadrados grises = ______

d) ¿Qué relación existe entre el número de cuadrados amarillos de cada arreglo y la posición que ocupa en la sucesión? ______

e) Expresen el número de cuadrados amarillos que hay en cada arreglo en términos de *n*.

Total de cuadrados amarillos = ______

f) Escriban una expresión general para hallar la cantidad total de cuadrados del arreglo *n*. ______

Reúnanse con otros equipos para analizar y responder en su cuaderno las preguntas que se plantean.

- ¿Cómo puede obtenerse el número de cuadrados amarillos y grises que habrá en el término 50?
- ¿Cómo es posible averiguar qué término será el arreglo compuesto por 545 cuadrados amarillos y grises?
- ¿Cómo pueden estar seguros de que las respuestas que obtuvieron en este problema son correctas?
- Utilicen el método de las diferencias finitas —estudiado en la lección 5 de este libro— para obtener las fórmulas con que se determina el número de cuadrados grises, amarillos y totales

(una fórmula para cada caso) que hay en el arreglo n de la sucesión de la figura 7. ¿Obtuvieron las mismas respuestas? ______. ¿Por qué? ______.

Si existen discrepancias en los resultados, soliciten la guía de su maestro para determinar cuál es el resultado correcto.

El mundo en un tablero

Con el propósito de mejorar tus habilidades en los métodos para encontrar el enésimo término de una sucesión, explora el siguiente interactivo:
http://proyectodescartes.org/Telesecundaria/materiales_didacticos/3m_b04_t01_s01-JS/index.html
(Consulta: 21 de enero de 2017.)

Escribe en la pantalla 1 del interactivo los primeros tres términos de la sucesión de la actividad 5. ¿Obtuviste la misma expresión general? ______.

6. De las opciones del recuadro "Expresiones algebraicas", elige la que corresponde a cada sucesión y escríbela en la línea.

a) Expresión general para la sucesión de la figura 8: ______.

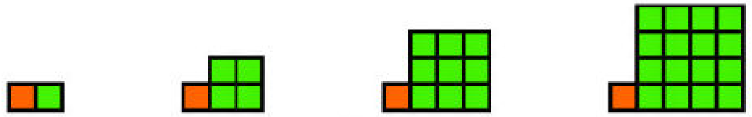


Figura 8

b) Expresión general para la sucesión de la figura 9: ______.

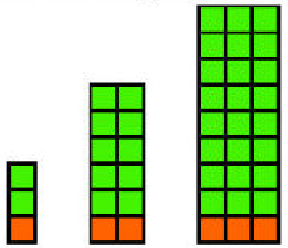


Figura 9

Expresiones algebraicas

$2n^2$

$2n^2+1$

n^2+1

$3n^2$

n^2+3n

$2n^2+3$

c) Expresión general para la sucesión de la figura 10: ______.

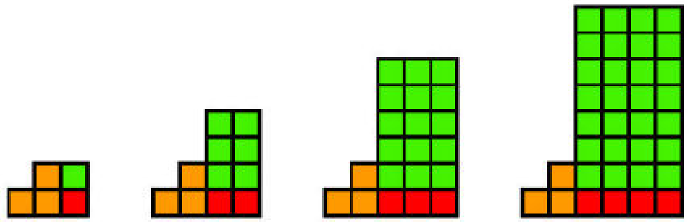


Figura 10

Dibuja en tu cuaderno una sucesión figurativa basada en alguna de las expresiones algebraicas que no usaste. Después intercámbialo con un compañero para verificar que la expresión algebraica corresponda con la sucesión figurativa.

Analicemos la partida

Pilas *in crescendo*

a) Compara el problema de "Jaque al rey" con el de la actividad 4. ¿Hay alguna similitud respecto a encontrar una expresión para la pila n? ______. ¿Cuál es? ______.

b) Siguiendo la misma estrategia que en la actividad 4, reacomoda las pilas y agrega tubos para obtener nuevos apilamientos de forma rectangular (figura 11).

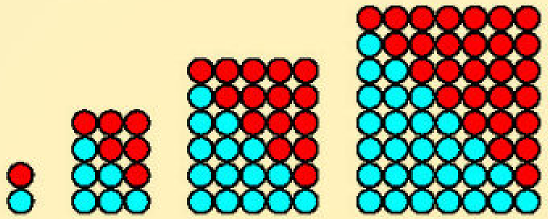


Figura 11

c) De acuerdo con la sucesión de la figura 11, completa la tabla 21.5.

Tabla 21.5. Cantidad de tubos en los arreglos rectangulares de la figura 11

Término n	Núm. de tubos en la base	Núm. de niveles en la altura	Total de tubos en el arreglo
5			
100			
n			

d) Halla una expresión general para la cantidad de tubos en la pila rectangular n.

e) De acuerdo con la expresión encontrada en el inciso *d*, escribe una expresión algebraica para la cantidad de tubos en una pila triangular n (como la de la figura 1).

f) Emplea la expresión que escribiste para averiguar si alguna pila de la sucesión de pilas triangulares tendrá 192 tubos.

En parejas, verifiquen sus respuestas por medio del método de las diferencias finitas. ¿Obtuvieron la misma expresión? ______. Escriban en su cuaderno una reflexión sobre los métodos usados para encontrar expresiones algebraicas en esta lección y el método de las diferencias finitas. ¿Cuál les parece mejor? ______. Justifiquen su respuesta. ______.

¿Usarían siempre el mismo método para cualquier problema? ______. Ejemplifiquen la pertinencia de utilizar tal o cual método con un par de sucesiones.

22. Análisis de las características de los sólidos de revolución

Contenido 4.2. Análisis de las características de los cuerpos que se generan al girar, sobre un eje, un triángulo rectángulo, un semicírculo y un rectángulo. Construcción de desarrollos planos de conos y cilindros rectos.

Jaque al rey

Maestría alfarera

Genaro elabora recipientes de barro de distintas formas utilizando un torno. Conocido por su destreza en el arte de la alfarería, la gente le solicita recipientes tanto de formas convencionales (cilindros, conos, semiesferas) como de formas más caprichosas. En cierto momento de la mañana empezó a modelar el recipiente que se muestra en la figura 1.

Figura 1

¿Qué dimensiones puede tener el recipiente para que su capacidad sea de 1 ℓ? ____________ ¿Por qué? ____________

Si Genaro hace presión donde está señalado el punto rojo, ¿qué efecto tendrá en la forma del recipiente? ____________ Haz un dibujo en tu cuaderno para ilustrar la respuesta.

¿Qué efecto tendría esta acción en la capacidad del recipiente? ____________

Apertura

▶ Cuerpos que se generan al hacer girar, sobre un eje, un triángulo rectángulo, un semicírculo y un rectángulo

En equipos de tres alumnos, analicen la situación y respondan las preguntas que se plantean.

1. En la ceremonia ritual de los voladores de Papantla, cinco danzantes suben a lo alto de un poste (que puede medir entre 25 m y 50 m de altura). Cuatro de ellos se atan una cuerda a la cintura y a los pies y se dejan caer de espaldas al vacío con los brazos extendidos. El quinto hombre —el sacerdote o caporal— se instala en la cúspide del poste donde, desde las alturas, empieza a tocar un tambor y una flauta; entre tanto, los voladores van dando vueltas al tiempo que descienden hasta llegar al suelo, como se muestra en la figura 2.

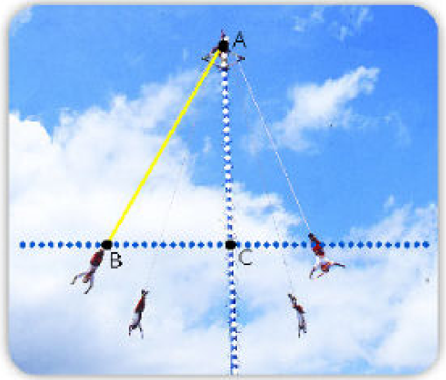


Figura 2

En la figura 2 se señalan los puntos *A*, *B* y *C* de tal manera que $\overline{BC}$ es perpendicular a $\overline{AC}$. Suponiendo que la cuerda no aumenta su longitud y se mantiene dando vueltas.

a) ¿Qué trayectoria sigue el punto *B* al girar? ____________
b) ¿Qué forma geométrica describe el segmento $\overline{BC}$ mientras el volador gira alrededor del poste? ____________
c) ¿Qué forma geométrica se genera conforme gira el segmento $\overline{AB}$? ____________
d) ¿Qué cuerpo geométrico se obtiene cuando el triángulo *ABC* gira alrededor del poste? ____________ Expliquen su respuesta. ____________

Comenten en equipo la manera de representar esta situación por medio de un modelo geométrico. Dibujen en su cuaderno una propuesta del modelo matemático usando sólo segmentos de recta y puntos. ¿Qué forma geométrica se obtiene? ____________

¿Cuántas caras planas tiene este cuerpo geométrico? ____________

¿Cuántas caras curvas? ____________ ¿Cuántas aristas? ____________ Con la guía de su maestro, organicen una reflexión grupal sobre los diferentes modelos propuestos por los equipos.

2. En parejas, analicen la rueda de la fortuna que se muestra en la figura 3.

Figura 3

a) ¿Qué tipo de figura geométrica es *ABCD*? ____________ ¿Qué propiedades geométricas la caracterizan? ____________
b) ¿Qué trayectoria sigue el punto *A* cuando la rueda de la fortuna está en movimiento? ____________ ¿Por qué? ____________
c) ¿Qué trayectoria sigue el punto *B*? ____________
d) ¿Qué sucede en el caso de los puntos *C* y *D*? Expliquen por qué. ____________
e) Cuando la rueda de la fortuna está en movimiento, ¿qué cuerpo geométrico describe el polígono *ABCD*? ____________

Justifiquen matemáticamente su respuesta. ____________

Comenten con otras parejas la forma de representar esta situación mediante un modelo geométrico. Dibujen en su cuaderno una propuesta del modelo matemático usando sólo segmentos de recta, puntos y curvas. ¿Cuántas caras planas tiene el cuerpo geométrico generado por la rotación de *ABCD*? ____________ ¿Cuántas caras curvas tiene? ____________ ¿Y cuántas aristas? ____________

Describan las principales propiedades de dicho cuerpo geométrico. ____________

3. Una variante del zumbador,[1] un juguete tradicional muy sencillo, se construye con un cordón sujeto con cinta adhesiva a las dos caras de una tapa de metal (figura 4). Al darle vueltas al cordón este se tuerce y acumula tensión que, al jalarse de los extremos, hace girar velozmente la tapa.

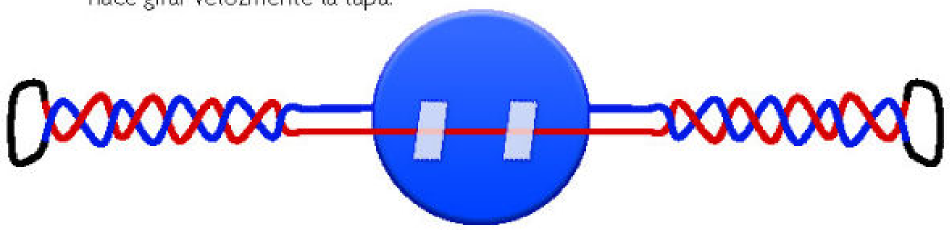


Figura 4

a) Al estirar el cordón, éste funciona como un eje de rotación. ¿Qué cuerpo geométrico genera la tapa circular? ____________.

b) ¿Cuántas caras planas tendrá el cuerpo descrito por el círculo? ________. ¿Y cuántas caras curvas? ____________.

¿Qué argumentos matemáticos permiten justificar sus respuestas? Propongan una justificación por equipo.

Sólidos de revolución

1. Reúnete con dos compañeros y construyan los modelos mostrados en la figura 5 utilizando sus juegos de geometría y un palo de madera.

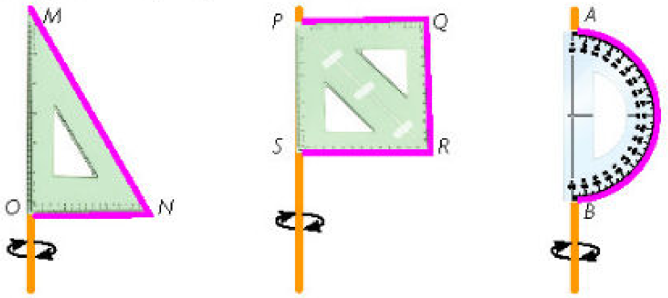


Figura 5

Hagan girar cada modelo mientras observan las líneas que se han resaltado.

a) Al hacer girar el modelo A alrededor del segmento $\overline{OM}$, ¿qué cuerpo se genera? ______. ¿Qué características geométricas tiene dicho cuerpo? ____________.

b) Al hacer girar el modelo B en torno al segmento $\overline{PS}$, ¿qué cuerpo se genera? ______. ¿Qué características geométricas tiene este cuerpo? ____________.

c) Al hacer girar el modelo C alrededor del segmento $\overline{AB}$, ¿qué cuerpo se genera? ______. ¿Qué características geométricas tiene dicho cuerpo? ____________.

Analicen la información del recuadro "Sólidos de revolución" y compárenla con sus respuestas en la actividad 1 de este apartado. Describan en su cuaderno las principales características de los sólidos generados, por ejemplo, la naturaleza de sus caras, los vértices, la altura, etcétera.

[1] En Latinoamérica recibe diferentes nombres. Por ejemplo, en Venezuela le llaman gurrufío; en Chile, run-run; en Ecuador, zun-zun y en Guatemala, chajalele.

Sólidos de revolución

Se llama generatriz a una línea (la cual puede ser recta, curva o bien una combinación de ambas) que, al girar alrededor de otra recta denominada directriz, genera una forma geométrica conocida como sólido de revolución.

En los ejemplos de la figura 6, los segmentos $\overline{AD}$, $\overline{DC}$, $\overline{CB}$ y $\overline{BA}$ (que forman el rectángulo azul), los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{CA}$ (que forman el triángulo amarillo) y la línea curva $\overline{AB}$ (que forma el semicírculo rojo) son generatrices que al girar dan origen, respectivamente, a un cilindro, un cono y una esfera.

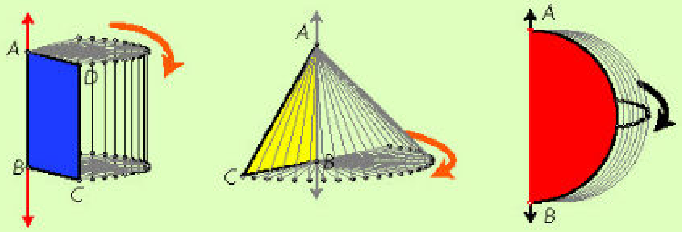


Figura 6

2. En la figura 7 se muestra una base para apilar discos compactos.

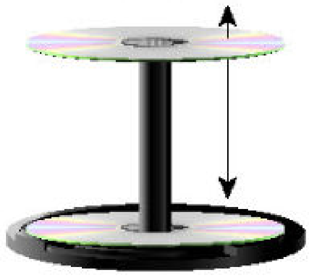


Figura 7

a) Al deslizar un disco compacto por el soporte, ¿qué cuerpo geométrico se genera?

____

b) Describe sus características:

i) Bases: ____________

ii) Caras planas: ____________

iii) Caras curvas: ____________

iv) Altura: ____________

v) Generatriz: ____________

vi) Cúspide: ____________

vii) Radio: ____________

En parejas, comenten qué cuerpo de los estudiados en esta lección es equivalente al que se forma con un disco cuando se traslada de un plano a otro plano paralelo.

¿Pasará esto con otros sólidos de revolución? ____________. Justifiquen su respuesta.

____

Con la guía de su maestro, comenten en grupo por qué el cono, el cilindro y la esfera se conocen como cuerpos de revolución. Escriban en su cuaderno una conclusión al respecto.

▶ Construcción de desarrollos planos de conos y cilindros rectos

En equipos de tres alumnos resuelvan los siguientes problemas.

1. Para una exposición escolar se debe construir un modelo de cartón de una batería cuyas dimensiones sean del doble que la original (figura 8).

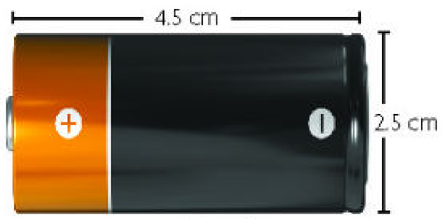


Figura 8

a) ¿Cuánto debe medir la altura del modelo de cartón? ______________________

b) ¿Cuánto tiene que medir el radio de la base? ______________________

c) Dibujen en una hoja blanca su propuesta de desarrollo plano.

d) Muestren a otros equipos el bosquejo con las medidas indicadas.

En caso de que las medidas de su desarrollo plano difieran de las de otros equipos, identifiquen qué equipo tiene el resultado correcto. Con las medidas consensadas, elaboren el desarrollo plano en una cartulina.

2. Un diseñador de muebles de piel quiere minimizar el material que por lo común se desperdicia al cortar y coser sus diseños. Generalmente, trata de que los cortes en la piel sean lo más aproximados a las dimensiones finales de los muebles (figura 9).

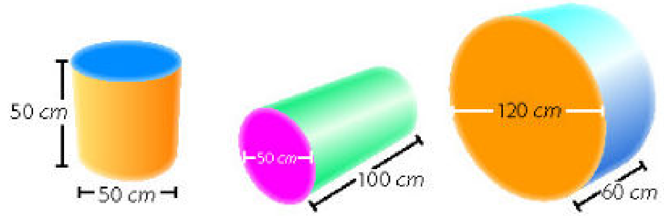


Figura 9

a) Diseñen en cartulina los desarrollos planos de los tres taburetes de manera que 10 cm de las medidas indicadas en las figuras sean equivalentes a 1 cm real en la cartulina.

b) Muestren a otros equipos un bosquejo de los desarrollos planos con las medidas indicadas.

c) ¿Obtuvieron desarrollos planos equivalentes? ______________________

En caso de que las medidas sean distintas entre los equipos, argumenten por qué llegaron a esos resultados. Logren un acuerdo sobre las medidas de cada uno de los desarrollos planos.

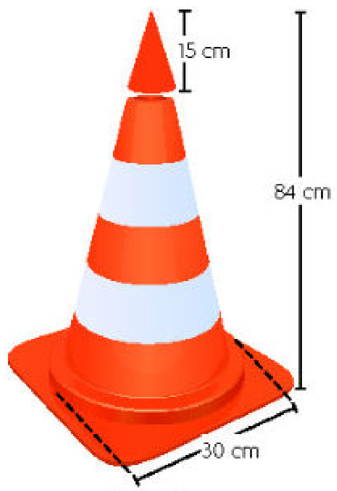


Figura 10

3. En la figura 10 se muestran las dos secciones de un cono vial; la sección inferior tiene una altura de 69 cm, mientras que las dos secciones juntas alcanzan 84 cm de altura.

a) ¿Cuánto mide el radio de la base circular del cono cúspide? ______________

b) ¿Cuánto mide el radio de la base de la sección inferior del cono vial? ______________

c) Dibujen en una hoja blanca una propuesta de desarrollo plano del cono vial completo, es decir, como si las dos secciones estuvieran juntas.

d) Muestren a otros equipos el bosquejo con las medidas indicadas.

Con las medidas consensadas en grupo, elaboren el desarrollo plano en cartulina y armen el prototipo.

4. En parejas, analicen el desarrollo plano de la figura 11.

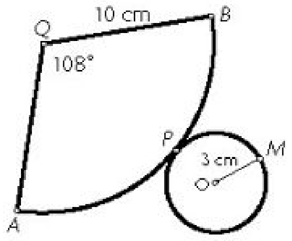


Figura 11

a) ¿La altura del cono es igual a la longitud del lado $\overline{AQ}$? ______________ Justifiquen su respuesta. ______________________

b) ¿Con qué datos del desarrollo plano es posible calcular la altura del cono? ______________ ¿Cuánto mide la altura del cono? ______________________

c) Expliquen el efecto sobre cómo se vería el cono si el punto *P* se hubiera elegido más cerca del punto *A* o más cerca del punto *B*. ______________________

d) Argumenten la manera en que se obtuvo la longitud del arco *APB* a partir de $\overline{OM}$ y $\overline{QB}$. ______________________

Tracen en una cartulina el desarrollo de la figura 11 y verifiquen que realmente sea posible armar un cono.

5. Una forma de vender helados es en barquillos de galleta como el de la figura 12.

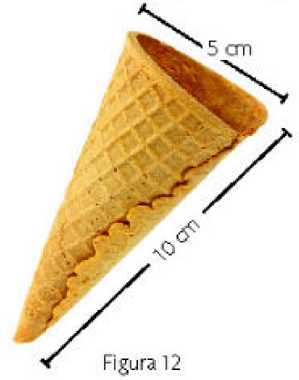


Figura 12

a) ¿Cuánto mide el radio de la base circular? ______________________

b) ¿Cuánto debe medir el ángulo del sector circular para generar el cono? ______________ ¿Por qué? ______________________

Dibujen en una cartulina el desarrollo plano del barquillo de helado a escala real y ármenlo.

Analicemos la partida

Maestría alfarera

Analicen de nuevo la ilustración del trabajo de Genaro (figura 1*a*).

a) Si se considera que el recipiente de Genaro es un cuerpo de revolución, ¿cuál es la generatriz? ______

b) Al hacer presión sobre el punto rojo, ¿qué efecto se tendrá sobre la generatriz? ______ ______. ¿Y sobre la capacidad del recipiente? ______.

c) ¿Cuál sería la generatriz de la vasija de la figura 13?

______

Figura 1*a*

Figura 13

Considera un cono y haz un diagrama de la forma en que sería posible generarlo como un cuerpo de revolución. Después, traza el desarrollo plano del cono. ¿Qué relación hay entre la generatriz del cono y su desarrollo plano? ______

______.

En el desarrollo plano indica cada una de las partes que corresponden al cono como un cuerpo de revolución. Repite lo anterior para el cilindro y la esfera. ______

______.

23. Pendiente de una recta, ángulo de inclinación y razón de cambio

Contenido 4.3. Análisis de las relaciones entre el valor de la pendiente de una recta, el valor del ángulo que se forma con la abscisa y el cociente del cateto opuesto sobre el cateto adyacente.

Jaque al rey

Una cima escondidiza

Gregory sube a la cima del Iztaccíhuatl para tomar una foto panorámica del Valle de México. Sin embargo, una ligera fumarola del Popocatépetl llama su atención y decide tomar en ese momento una fotografía del suceso. Debe enfocar entonces su telefoto hacia la cima del Popo, por lo que tiene que girarlo apenas un poco hacia arriba sobre el tripié en el cual está montada la cámara (figura 1).

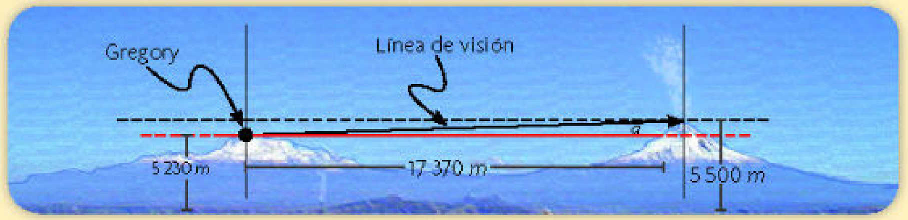


Figura 1

Gregory no se explica por qué le resulta tan complicado enfocar la cima del Popo. Al girar el telefoto pierde de vista la cima con mucha facilidad, pero si no lo gira no logra verla.

Después de meditarlo, Gregory compara la diferencia de las alturas de los volcanes con la distancia que los separa (figura 1). ¿Cuántas veces es más pequeña esa diferencia respecto a la distancia entre los volcanes? ______
¿Qué relación hay entre el ángulo de giro del telefoto de la cámara (*a* en la figura 1) y la comparación de distancias que hace Gregory? ______
Determina el valor del ángulo *a*. ______. Explica mediante un argumento matemático por qué razón le costó tanto trabajo a Gregory enfocar, desde la cima del Iztaccíhuatl, la cima del Popo con el telefoto. ______

Apertura

▶ La pendiente como una razón

En equipos de tres personas, analicen las situaciones y respondan las preguntas.

1. Sobre una pared —como se muestra en la figura 2— se traza la recta $\overline{AB}$ que servirá de guía para construir una escalera de concreto de 12 escalones.

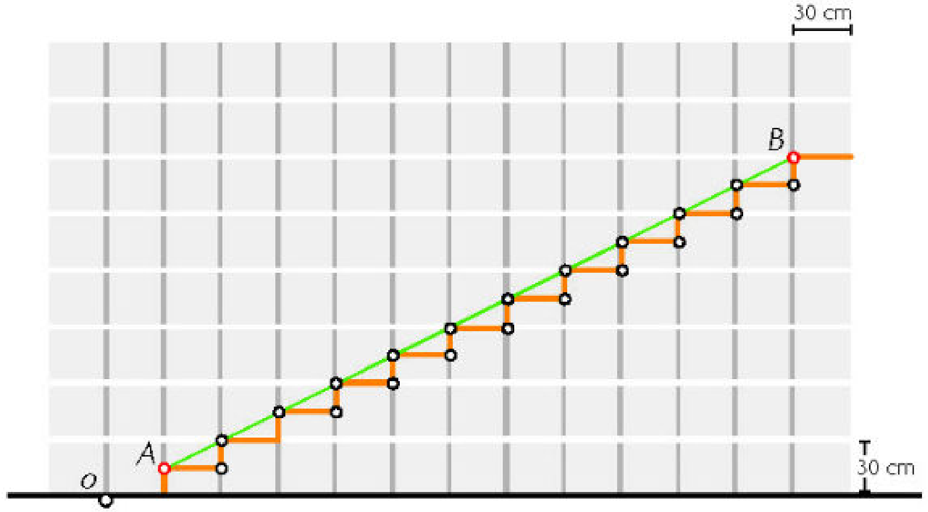


Figura 2

a) ¿Cuánto miden la huella y la altura de cada escalón? ____________

b) Por cada 30 cm hacia la derecha, ¿cuánto sube la recta $\overline{AB}$? ____________

c) Para cada escalón, ¿cuál es el cociente de su altura respecto a su huella? ____________

d) Si se sobrepone un plano cartesiano con origen en *O* en la situación de la figura 2, escribe cuál es la ecuación de la recta $\overline{AB}$. ____________

Con la guía de su maestro, escriban una conclusión en grupo sobre la relación entre la magnitud de la huella y la altura del escalón con la pendiente de la recta $\overline{AB}$.

2. Un sitio de taxis estableció que el banderazo inicial tuviera un costo de \$10.00 y que por cada minuto transcurrido se cobrara un precio adicional de \$1.

a) En su cuaderno tracen una gráfica del costo por viajar en un taxi de este sitio respecto al tiempo transcurrido en un servicio.

b) Anualmente, la base de taxis aumentó el costo del banderazo pero mantuvo el costo por minuto de viaje. En los cinco años posteriores los costos del banderazo fueron de: \$11, \$12, \$13, \$14 y \$15. Grafiquen en cada caso el costo de viajar en taxi respecto al tiempo transcurrido. ¿Qué sucede con las gráficas? __________ Justifiquen su respuesta.

____

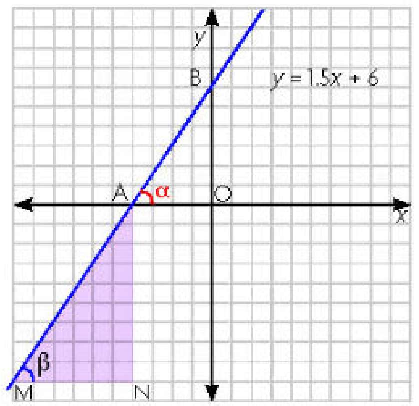
c) Si el costo inicial del banderazo se hubiera establecido en \$9, \$8, \$7, \$6 o \$5, ¿qué sucedería con las gráficas? Expliquen por qué. ____________

d) Tracen en el mismo plano cartesiano las distintas gráficas de los incisos *a*, *b* y *c*. ¿Qué tienen en común? ____________

Si un taxista cobra la tarifa establecida en el enunciado de este problema, ¿cuántos minutos ha viajado un pasajero si el taxímetro marca \$65.00? ____________

¿Qué argumento matemático justifica su respuesta? ____________

3. Analicen la gráfica de la recta y = 0 1.5x + 6 (gráfica 23.1).



Gráfica 23.1

a) ¿Cuánto mide el ángulo α? ____________

b) ¿Cuánto miden los lados del triángulo *AOB*? ____________

c) En el triángulo *AOB*, calculen el cociente entre el cateto opuesto y el cateto adyacente del ángulo α. ____________

d) ¿Cuánto vale el cociente entre el cateto opuesto y el cateto adyacente del ángulo β en el triángulo *MNA*? ____________

e) ¿Qué relación hay entre los triángulos *AOB* y *MNA*? ____________

f) Construyan tres triángulos diferentes a los que se muestran en la gráfica 23.1, cuya hipotenusa esté sobre la recta $y = 1.5x + 6$ y cuyos catetos sean paralelos a los ejes cartesianos, como los triángulos de los incisos *b* y *d*.

g) Calculen los cocientes entre el cateto opuesto y el cateto adyacente en cada uno de los triángulos que construyeron en el inciso *f*. Tomen como referencia el ángulo que se forma con la recta y el cateto paralelo al eje de las abscisas. Con estos datos completen la tabla 23.1.

Tabla 23.1. Cocientes de los catetos en los triángulos de la gráfica 23.1

	Cateto opuesto (CO)	Cateto adyacente (CA)	$\frac{CO}{CA}$
Triángulo 1			
Triángulo 2			
Triángulo 3			

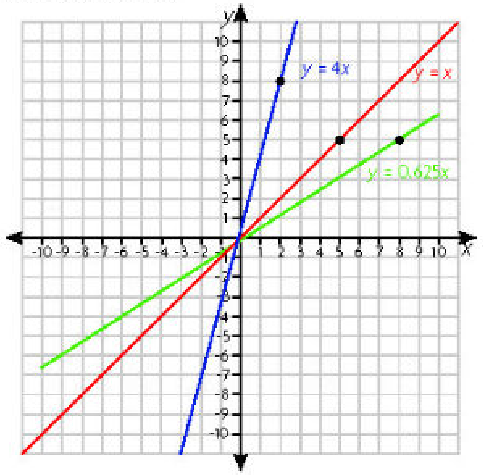
h) ¿Cómo son entre sí los cocientes obtenidos en los tres triángulos? ____________

Describan en su cuaderno la relación entre el cociente $\frac{CO}{CA}$ y la pendiente de la recta.

¿Qué relación hay entre la tangente del ángulo de inclinación de la recta y el cociente $\frac{CO}{CA}$? ____________

Con la guía de su maestro, exploren con una calculadora científica el valor del ángulo cuya tangente es 1.5. ¿Qué obtuvieron? ____________

4. Analicen las rectas de la grafica 23.2.



Gráfica 23.2

a) ¿Qué tienen en común las rectas de la gráfica 23.2? ______.

b) Escriban las coordenadas de los puntos resaltados. ______.

c) Para cada recta, tracen triángulos rectángulos cuya hipotenusa quede determinada por el origen y los puntos resaltados.

d) Tomando como referencia el ángulo que cada recta forma con el eje de las abscisas, calculen el cociente de la razón $\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$. Con esta información, completen la tabla 23.2.

Tabla 23.2. Análisis de las rectas de la gráfica 23.2

Función	Medida del ángulo	Medida del cateto adyacente	Medida del cateto opuesto	Razón $\left(\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}\right)$	Cociente (decimal)	Pendiente de la recta
$y = 4x$						
$y = x$						
$y = 0.625x$						

e) ¿Qué relación existe entre el cociente y la pendiente de cada recta? ______

______.

Contrasten sus respuestas con las de otros equipos. Si hay discrepancias, expongan con claridad las ideas que apoyan sus resultados.

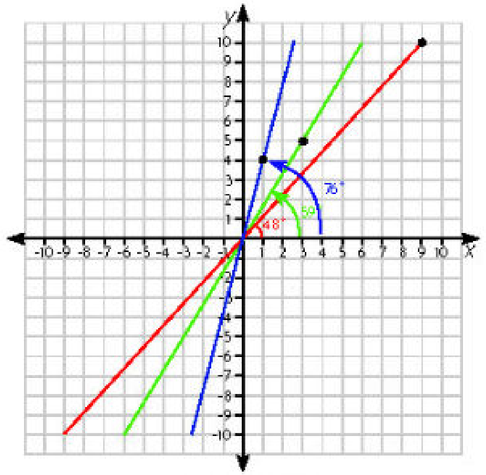
El mundo en un tablero

Para mejorar tus habilidades en el cálculo de la pendiente de una recta, visita la página: http://www.educaplay.com/es/recursoseducativos/549493/pendiente__de__la__recta.htm (Consulta: 22 de junio de 2013.)

En este interactivo podrás visualizar cuál es la "forma" de una recta si se conoce el valor de la pendiente.

Reúnete con un compañero para lograr una mejor puntuación. Comenten los ejercicios que alguno no pudo resolver y argumenten matemáticamente la respuesta correcta.

5. En la gráfica 23.3, observen la medida de los ángulos que forman cada una de las rectas respecto al eje de las abscisas.



Gráfica 23.3

a) Para cada recta, tracen triángulos rectángulos cuya hipotenusa quede determinada por el origen y los puntos resaltados. Tomando en cuenta cada uno de los ángulos de la gráfica 23.3, calculen el cociente de la razón $\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$. ______

______

b) Con una calculadora exploren el valor del ángulo cuya tangente es la pendiente de la recta. ¿Qué obtienen? ______

c) Completen la tabla 23.3.

Tabla 23.3. Análisis de las rectas de la gráfica 23.3

Ecuación de la recta	Ángulo respecto al eje de las abscisas (ω)	Pendiente (m)	tan (ω)
	48°		
	59°		
	76°		

d) ¿Qué relación hay entre el ángulo que se determina y el valor de la pendiente de la recta? ______

¿Qué argumento matemático permite establecer la magnitud del ángulo de inclinación de la recta conociendo sólo su ecuación? ______

¿Qué relación hay entre la pendiente de una recta de la forma $y = mx + b$ y la tangente del ángulo que se forma entre la recta y el eje de las abscisas? ______

______

Con la guía de su maestro, obtengan conclusiones generales sobre la relación entre el valor de la pendiente de una recta, el cociente $\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$ y el valor del ángulo que se forma con el eje de las abscisas.

Analicemos la partida

Una cima escondidiza

Observa de nuevo la situación en que se encuentra Gregory.

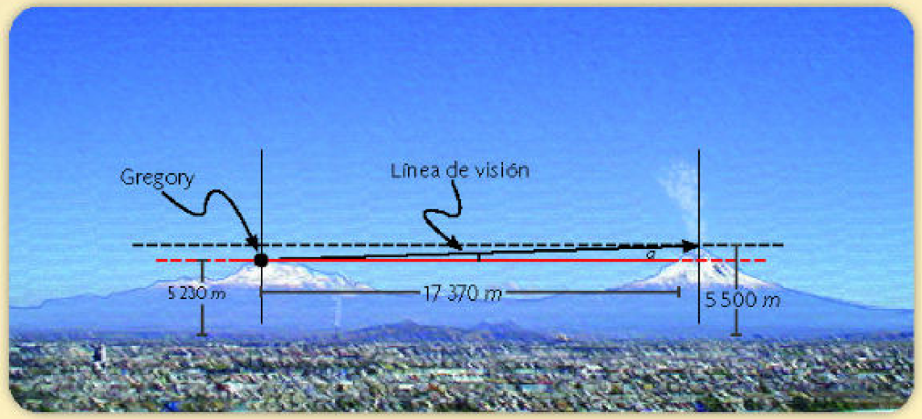


Figura 3

a) ¿Qué significan en la figura 3 las líneas roja y azul? ______

b) Suponiendo que Gregory se encuentre en el origen de un plano cartesiano superpuesto a la fotografía de la figura 3, ¿cuál es la ecuación de la recta que corresponde a la línea de visión? ______

c) En el triángulo OBC, ¿cuánto vale la tangente de a? ______.

d) ¿Cuál es el valor de la pendiente de la recta $\overline{OB}$? ______.

e) ¿Cuánto mide el ángulo cuya tangente es m? ______.

Apoyándote en gráficas y ecuaciones (o en otro elemento que consideres importante), describe la relación que hay entre la pendiente de una recta y el ángulo que forma respecto al eje de las abscisas.

24. Relaciones entre los elementos de un triángulo rectángulo

Contenido 4.4. Análisis de las relaciones entre los ángulos agudos y los cocientes entre los lados de un triángulo rectángulo.

Jaque al rey

Zacatecas desde su teleférico

Ximena sube a la cabina del teleférico que atraviesa el centro de la ciudad de Zacatecas y, conforme asciende al cerro de La Bufa, escucha atenta la información turística de un guía. Entre otras cosas, se destaca el recorrido del viaje y el ángulo aproximado de elevación de esa trayectoria (figura 1).

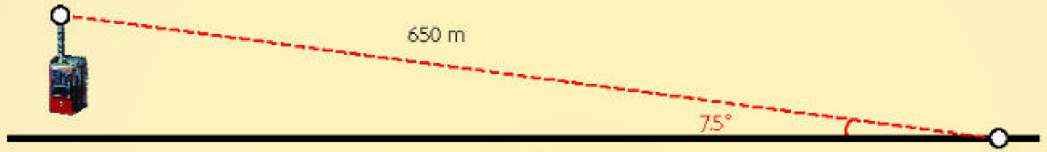


Figura 1

Ximena espera escuchar un dato que le interesa: la altura que asciende el teleférico desde el punto de partida, pero justo en ese momento suena su celular y por contestar no oye la información del guía.

Al terminar el recorrido, hace un diagrama con la información que alcanzó a oír para determinar la altura que subió el teleférico.

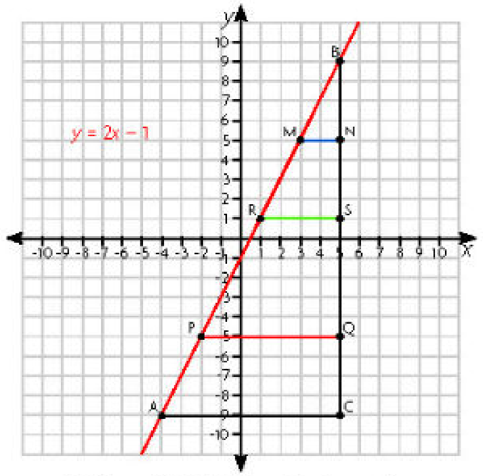
Con la información que escuchó Ximena, ¿es posible determinar la altura a la que asciende el teleférico de la ciudad de Zacatecas? ______. Si tu respuesta es afirmativa, ¿de qué manera puede hacerlo y cuál es dicha altura? ______.
Si piensas que no es posible, explica por qué. ______.

Con los datos de la figura 1, ¿cómo encontrarías la distancia horizontal que se desplaza el teleférico? ______. Justifica tu respuesta. ______. ¿Cuánto mide esta distancia? ______.

Apertura

▶ Los lados de un triángulo rectángulo

1. En equipos de tres alumnos, analicen la gráfica 24.1. Pueden usar calculadora para efectuar las operaciones necesarias y contestar los incisos.



Gráfica 24.1. Triángulos formados a partir de la recta $y = 2x - 1$

a) ¿Cuánto mide el cateto opuesto al ∡*A* en el triángulo *ABC*? ________. ¿Y la hipotenusa? ________. ¿Cuánto vale el cociente $\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$? ________.

b) Completen la tabla 24.1 encontrando los datos respecto al ángulo que se indica en la columna "Ángulo".

Tabla 24.1. Razones de los catetos entre la hipotenusa en los triángulos rectángulos de la gráfica 24.1

Triángulo	Ángulo	Medida del cateto opuesto	Medida del cateto adyacente	Medida de la hipotenusa	Cociente $\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$	Cociente $\frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$
BAC	*A*					
BPQ	*P*					
BRS	*R*					
BMN	*M*					

c) ¿Qué sucede con el valor del cociente $\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$ en todos los triángulos de la gráfica 24.1? ________ ¿Por qué? ________

d) ¿Qué sucede con el valor del cociente $\frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$ en todos los triángulos de la gráfica 24.1? ________. Justifiquen su respuesta. ________

e) Completen la tabla 24.2 tomando como referencia el ∡*B*.

Tabla 24.2. Razones de los catetos entre la hipotenusa en los triángulos rectángulos de la gráfica 24.1 para el ∡*B*

Triángulo	Medida del cateto opuesto al ∡B	Medida del cateto adyacente al ∡B	Medida de la hipotenusa	Cociente $\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$	Cociente $\frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$
MBN					
RBS					
PBQ					
ABC					

f) ¿Cómo son entre sí los resultados de las últimas dos columnas? ________.

¿Qué argumento matemático justifica estos resultados? ________

Si se tienen triángulos rectángulos cuyos ángulos agudos miden lo mismo, ¿las razones $\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$ y $\frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$ respecto al mismo ángulo darán el mismo resultado? ________. ¿Por qué? ________.

Razones trigonométricas

Las razones trigonométricas son relaciones que se establecen entre las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo respecto a un ángulo dado. Tomando como referencia el ∡*A* de la figura 2, las tres principales razones son:

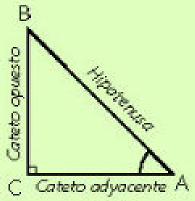


Figura 2

$$\text{sen } A = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$$
$$\cos A = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$$
$$\tan A = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$$

2. A partir de la información del recuadro "Razones trigonométricas", analicen el triángulo de la figura 3. Empleen un transportador para medir los ángulos que se piden.

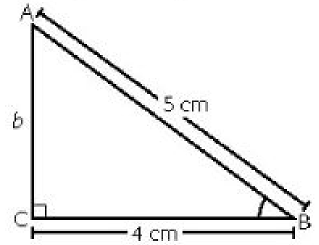


Figura 3

a) Mide el lado *b* usando una regla. ________

b) ¿Cuánto mide el ∡*A*? ________. ¿Cuál es el valor de sen *A*? ________.

c) ¿Cuánto mide el ∡*B*? ________. ¿Cuál es el valor de cos *B*? ________.

d) ¿Cuál es el valor de sen *B*? ________. ¿Cuál es el valor de cos *A*? ________.

e) ¿Cuánto suman los ángulos *A* y *B*? ________

f) ¿Qué relación hay entre el sen *A* y el cos *B*? ________
¿Por qué? ________

Con los valores de los ángulos *A* y *B* que midieron en la figura 3 y usando una calculadora científica, pidan a su maestro que les explique cómo hallar los valores de sen *A* y cos *B*. ¿Coinciden con los valores que encontraron? ________. ¿Por qué? ________

3. En parejas, analicen el triángulo de la figura 4. Usen un juego de geometría para determinar las medidas necesarias.

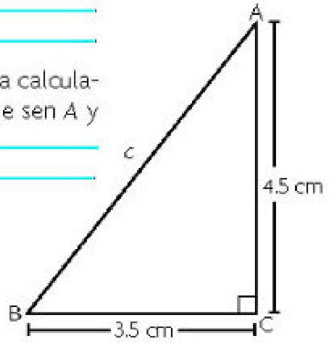


Figura 4

a) ¿Cuál es el valor de sen *A*? ________. ¿Y el de cos *A*? ________

b) ¿Cuál es el valor de sen *B*? ________. ¿Y el de cos *B*? ________

c) ¿Cuánto vale la suma de los ángulos A y B? ____________________

d) ¿Qué relación hay entre sen A y cos B? ____________________
¿Por qué? ____________________
¿Y entre sen B y cos A? ____________________

e) Con una calculadora científica y el valor de los ángulos que midieron, verifiquen que las respuestas a las preguntas de los incisos *a-d* coincidan con los valores obtenidos.

A partir de los problemas 2 y 3 respondan en grupo las preguntas que se formulan.

- ¿Qué relación hay entre los ángulos A y B de los triángulos rectángulos? ____________________
- ¿Qué nombre reciben estos ángulos a partir de dicha propiedad? __________
- ¿Qué relación existe entre el seno de un ángulo y el coseno de su complemento? __________

Proporcionen un argumento que respalde la relación que encontraron.

4. En un triángulo rectángulo ABC (cuyo ángulo recto es C) se cumple que $\cos A = \frac{1}{2}$.

a) ¿Es posible determinar con esta información el perímetro del triángulo ABC? __________
Si tu respuesta es afirmativa, ¿cuánto mide el perímetro? __________

b) ¿Cuánto vale el sen B? ____________________

Si en un triángulo rectángulo se conoce el valor del seno de un ángulo, ¿es posible hallar el valor del coseno del mismo ángulo? __________ ¿Y los valores del seno y el coseno del otro ángulo? __________ ¿Por qué? ____________________

5. En equipos de tres alumnos, analicen el triángulo de la figura 5 y respondan las preguntas de los incisos.

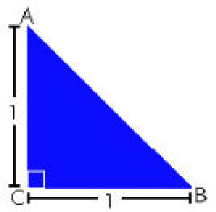


Figura 5

a) Según la medida de sus lados, ¿qué tipo de triángulo es? ____________________

b) ¿Cuánto mide la hipotenusa? ____________________

c) Calculen las razones trigonométricas:

sen A = __________ sen B = __________
cos A = __________ cos B = __________
tan A = __________ tan B = __________

d) ¿Cuánto mide el $\measuredangle A$? __________ ¿Y el $\measuredangle B$? __________

Si en un triángulo rectángulo sus catetos miden lo mismo, ¿es posible encontrar el valor del seno, el coseno y la tangente de sus ángulos? __________ ¿Por qué? __________

¿Cuál es el valor de cada razón trigonométrica? ____________________

6. Con base en la información de la figura 6, responde las preguntas que se plantean.

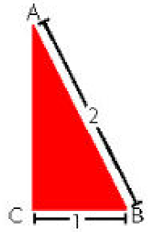


Figura 6

a) Calcula las razones trigonométricas:

sen A = __________ sen B = __________
cos A = __________ cos B = __________
tan A = __________ tan B = __________

b) ¿Qué razón relaciona el $\measuredangle B$, la hipotenusa y el cateto $\overline{AC}$? __________

c) ¿Qué razón relaciona el $\measuredangle A$, la hipotenusa y el cateto $\overline{AC}$? __________

Reúnete con otro compañero y analicen las siguientes preguntas.

Si se quiere determinar el valor de las razones trigonométricas con base en las medidas de los lados de un triángulo rectángulo, ¿es posible hacerlo conociendo la longitud de un solo lado? __________ ¿Se puede determinar el valor si se sabe la longitud de dos lados? __________ ¿Y de los tres lados? ____________________

Con los resultados obtenidos en las actividades 5 y 6, ¿cómo completarían la tabla 24.3? Utilicen una calculadora para expresar los cocientes con cuatro cifras decimales.

Tabla 24.3. Razones trigonométricas de los triángulos notables

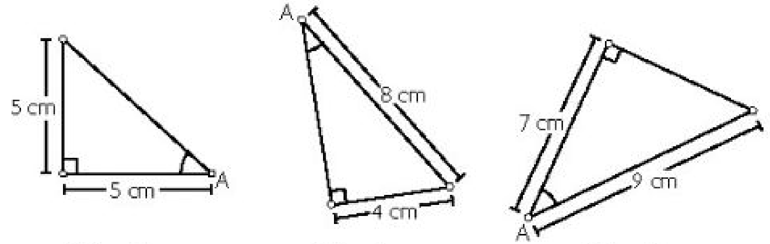
Ángulo	Seno		Coseno		Tangente	
	Razón	Cociente	Razón	Cociente	Razón	Cociente
30°						
45°						
60°						

El mundo en un tablero

A fin de complementar tu conocimiento sobre los conceptos matemáticos de esta lección, visita el sitio http://concurso.cnice.mec.es/cnice2006/material098/geometria/geoweb/trigo1.htm (Consulta: 28 de mayo de 2013.)

Explora la página web y comenta con otros compañeros estas preguntas: ¿Qué nuevos conceptos se abordan en ella? ¿Qué relación tienen con lo que han estudiado en esta lección?

7. En parejas, calculen las razones trigonométricas indicadas para cada uno de los triángulos de la figura 7.



Triángulo I Triángulo II Triángulo III
Figura 7

Triángulo I	Triángulo II	Triángulo III
sen A = ________	sen A = ________	sen A = ________
cos A = ________	cos A = ________	cos A = ________
tan A = ________	tan A = ________	tan A = ________

A partir de la información dada en la figura 8, encuentren las razones faltantes.

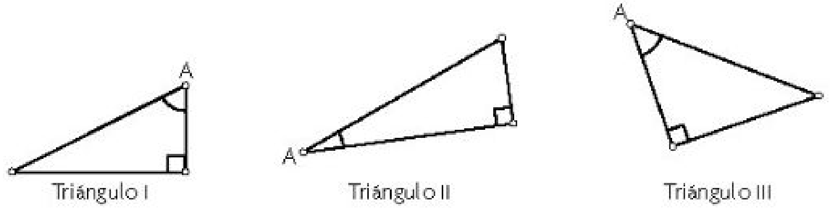


Figura 8

Triángulo I

sen A = ________

cos A = ________

tan A = $\frac{6}{3}$

Triángulo II

sen A = $\frac{3}{8}$

cos A = ________

tan A = ________

Triángulo III

sen A = ________

cos A = $\frac{4.5}{7}$

tan A = ________

Con una calculadora determina los valores de los ángulos en los triángulos de las figuras 7 y 8. ________

8. Desde un montículo —con un ángulo de elevación de 39° respecto al nivel de la plancha de la Plaza de la República— se puede apreciar la cúspide del Monumento a la Revolución, como se muestra en la figura 10.

Puesto que la altura del declive desde el montículo hasta el monumento es poca, haz la suposición de que el triángulo mostrado en la figura 10 es un triángulo rectángulo y contesta las preguntas.

a) ¿Qué razón trigonométrica relaciona la altura x del monumento, la distancia del monumento al montículo y el ángulo de elevación? ________.

b) Con la guía de su maestro, obtengan los siguientes datos empleando una calculadora científica:

- sen 39° = ________
- cos 39° = ________
- tan 39° = ________

c) ¿Con cuál de los tres valores encontrados en el inciso *b* se calcula la altura del monumento? ________.

Argumenten matemáticamente por qué. ________

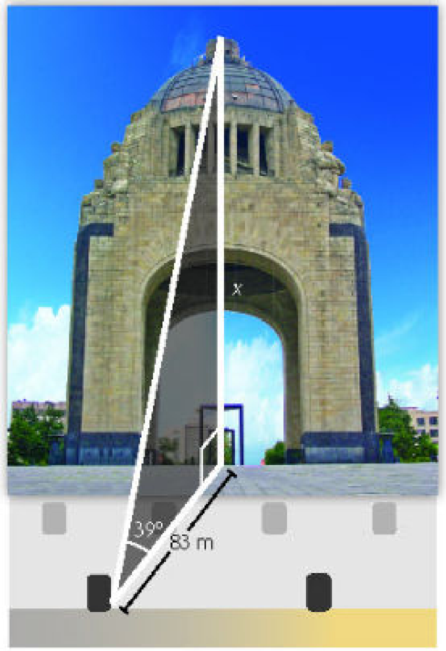


Figura 10

Planteen y resuelvan la ecuación que se determina con la razón del inciso *a* y el dato seleccionado del inciso *b*. A partir de esta información, calculen la altura del monumento. ________

Analicemos la partida

Zacatecas desde su teleférico

Observa la figura 1*a*, que representa el problema inicial de "Jaque al rey".

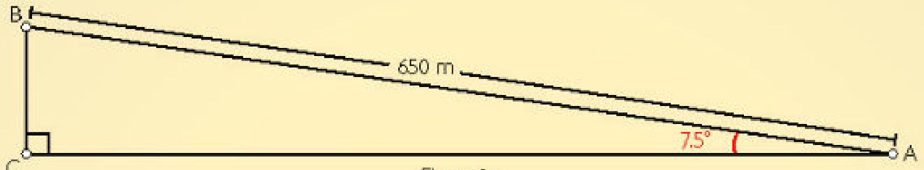


Figura 1*a*

a) ¿Qué razón trigonométrica relaciona la distancia recorrida (650 m) con la altura máxima de la cabina y el ángulo de elevación? ________.

b) ¿Cuál es la máxima altura alcanzada por la cabina? ________.

c) ¿Qué razón trigonométrica relaciona la distancia horizontal recorrida por la cabina y el ángulo de elevación? ________.

Determina la distancia horizontal recorrida por la cabina del teleférico de la ciudad de Zacatecas. ________.

Cuando se encuentran las medidas de los tres lados y de los tres ángulos de un triángulo, se dice que se ha resuelto el triángulo.

En parejas, comenten cuál es el número mínimo de datos para resolver un triángulo rectángulo. ________ ¿Qué datos pueden ser? ________

Planteen un problema en el que, dado el número mínimo de datos en un triángulo rectángulo, pidan hallar otra medida (ya sea de un lado o de un ángulo). Intercambien su libro con el de un compañero y resuelvan el problema.

Después, contrasten tanto su respuesta como el procedimiento que siguieron. ¿El problema que plantearon tiene una solución única o varias soluciones? ________

Expliquen por qué. ________.

25. Usos de la trigonometría

Contenido 4.5. Explicitación y uso de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente.

Jaque al rey

Edificios que se hunden

Dadas sus características estratigráficas,[1] el suelo de la Ciudad de México experimenta un hundimiento que no es uniforme en toda la urbe. Por esta razón, un topógrafo está haciendo una serie de mediciones de los edificios más altos del Centro Histórico para determinar cuál ha sido el nivel de hundimiento en el último semestre.

En la figura 1 se observa la distancia entre la Torre Latinoamericana y el topógrafo, así como el ángulo de elevación de su teodolito a la punta de la antena de este edificio. Como el lugar en que se ubica el topógrafo es un referente que no ha experimentado ningún cambio de nivel, comparará los datos que obtenga ahora con los del último registro.

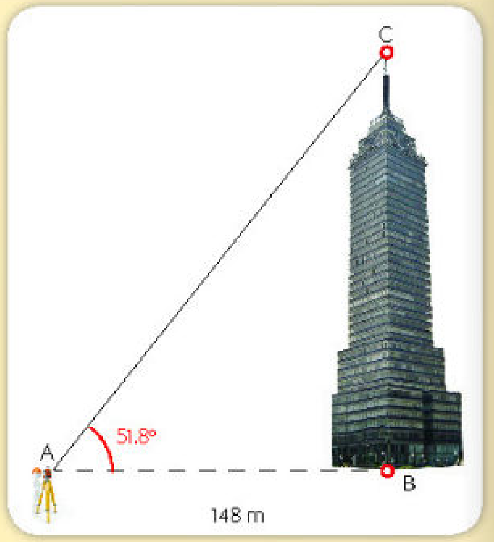


Figura 1

Conociendo el ángulo de elevación del teodolito y la distancia a la que se encuentra de la torre, ¿puede el topógrafo determinar su altura? ______. ¿Y la de la antena? ______. Si consideras que es posible determinar la altura en ambos casos, calcúlala. ______. Si no, justifica por qué. ______

Apertura

Las razones trigonométricas

1. En equipos de tres alumnos, analicen la construcción de la figura 2 y respondan las preguntas de los incisos.

[1] La estratigrafía es una rama de la geología que se encarga del estudio e interpretación de la composición, naturaleza, génesis y distribución temporal y espacial de los depósitos sedimentarios y otras rocas asociadas; asimismo, estudia los sucesos y fenómenos relacionados con ellas.

a) ¿Cuánto mide el radio de la circunferencia? ______. ¿Y la hipotenusa del triángulo *ABC*? ______.

b) ¿Qué coordenadas tiene el punto *B*? ______.

c) ¿Los triángulos *ABC* y *AED* son semejantes? ______. ¿Por qué? ______

d) Escriban la relación de proporcionalidad que involucra a los segmentos $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, $\overline{BC}$ y $\overline{ED}$. ______.

e) Suponiendo que el punto *B* tiene coordenadas (x, y), escriban las expresiones que determinan las siguientes razones trigonométricas.

sen A = ______ cos A = ______ tan A = ______

f) ¿La relación de proporcionalidad del inciso *d* involucra alguna razón trigonométrica del inciso *e*? ______. ¿Cuál? ______

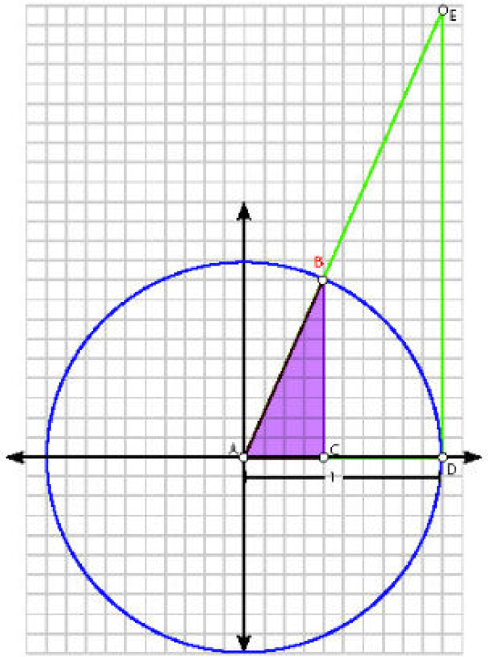


Figura 2

Contrasten sus resultados con los de otros equipos y en plenaria respondan las siguientes preguntas: ¿Cómo son entre sí el sen *A* y la coordenada *y* del punto *B*? ______. ¿Qué argumento matemático justifica esta relación? ______

¿Cómo son entre sí cos *A* y la coordenada *x* del punto *B*? ______. ¿Por qué? ______.

¿Cómo son entre sí la tan *A* y la longitud del segmento $\overline{DE}$? ______. Expliquen por qué. ______

El mundo en un tablero

Con el propósito de mejorar tus habilidades en el uso de las razones trigonométricas en el círculo unitario, visita la página http://www.geogebratube.org/student/m37254 (Consulta: 30 de mayo de 2013.)

Si es posible, usen el interactivo en el salón de clases para resolver las siguientes interrogantes. Si esto no es posible, busquen la manera de descargarlo en alguna computadora desde su casa. Comenten con otros compañeros el efecto en las razones trigonométricas al desplazar el punto *B* sobre la circunferencia.

2. Utilicen el interactivo de "El mundo en un tablero" o bien dibujen un círculo unitario como el de la figura 2 para completar la tabla 25.1 calculando las razones trigonométricas de los ángulos dados.

Tabla 25.1. Razones trigonométricas de los ángulos notables en el círculo unitario

A	sen *A*	cos *A*	tan *A*
30°			
45°			
60°			
90°			

Con la guía de su maestro, elaboren en el pizarrón una tabla que contenga los resultados. Comparen sus observaciones para obtener resultados consensados en el grupo.

3. El asta bandera monumental de Piedras Negras, Coahuila, es la segunda más alta del mundo. En cierta época del año y a una hora exacta del día los rayos del sol determinan un ángulo de elevación y proyectan una sombra como se muestra en la figura 3.

Figura 3

a) ¿Con qué razón trigonométrica se puede calcular la altura del asta? ______

b) ¿Cuánto mide el asta? ______

Si se conociera el ángulo de elevación y la altura del asta, ¿sería posible calcular la longitud de la sombra proyectada por el asta? ______ ¿Por qué? ______

4. En la figura 4 se muestra una escalera de tijera con las dimensiones de cada una de las escaleras sencillas y la abertura máxima que permite la bisagra. Si se traza una perpendicular al suelo que pase por el vértice de la escalera de tijera, se formarán dos triángulos rectángulos.

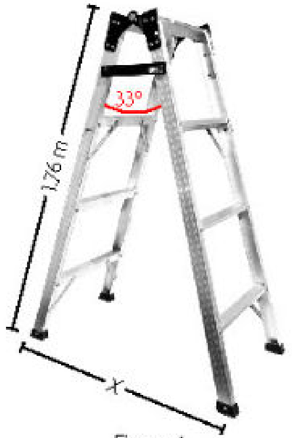


Figura 4

a) ¿Cuánto mide la hipotenusa de cada uno de ellos? ______

b) ¿Cuánto mide la distancia *x* (abertura lateral) que separa los tacones antiderrapantes de la escalera de tijera? ______

Si sólo se conociera la medida de una escalera sencilla, ¿sería posible calcular la longitud de su abertura lateral? ______ ¿Por qué? ______

5. En la figura 5 se muestra una escalera de 3 m de longitud recargada contra una barda.

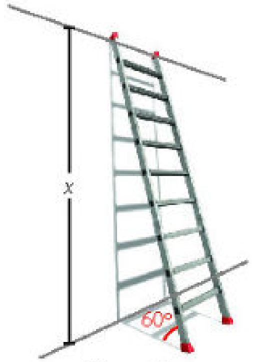


Figura 5

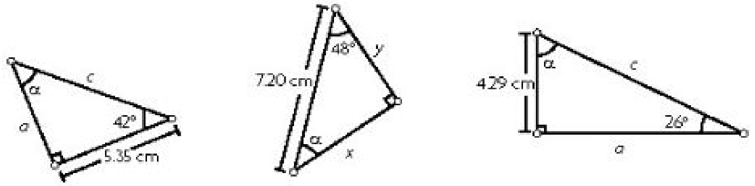
a) ¿Qué razón trigonométrica relaciona la altura de la barda, la longitud de la escalera y el ángulo de elevación? ______

b) ¿Cuánto mide la altura de la barda? ______

c) ¿Qué distancia hay entre los tacones antiderrapantes de la escalera y la base de la barda? ______

¿Empleaste calculadora para resolver este problema? ______ Si la respuesta es afirmativa, considera que el triángulo rectángulo formado por la escalera, el piso y la barda es la mitad de un triángulo equilátero. Comenten esto en el grupo y den una solución sin emplear la calculadora.

6. En los triángulos de las figuras 6 y 7 calcula los valores que se piden.



Triángulo 1 Triángulo 2 Triángulo 3

Figura 6

a) Para el triángulo 1, calcula:

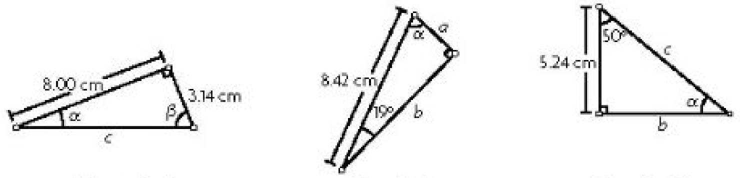
a = ______ c = ______ α = ______

b) Para el triángulo 2, calcula:

x = ______ y = ______ α = ______

c) Para el triángulo 3, calcula:

α = ______ a = ______ c = ______



Triángulo A Triángulo B Triángulo C

Figura 7

d) Para el triángulo A, calcula:

c = ______ α = ______ β = ______

e) Para el triángulo B, calcula:

a = ______ b = ______ α = ______

f) Para el triángulo C, calcula:

b = ______ c = ______ α = ______

Intercambia tu libro con el de otro compañero y analiza los resultados que obtuvo. En caso de que exista alguna respuesta distinta a la tuya, comenten cuáles son los argumentos de cada quien y obtengan una respuesta consensada.

▶ Razones trigonométricas de ángulos notables

1. En parejas, analicen el triángulo de la figura 8 y respondan las siguientes preguntas.

a) De acuerdo con la medida de sus lados, ¿qué tipo de triángulo es *ABC*? ________

b) ¿Cuánto mide el ángulo α? ________ ¿Y el ángulo β? ________

c) ¿Cuál es la medida de la altura $\overline{AM}$? ________

d) Calcula:

sen α = ________ cos α = ________ tan α = ________

e) Calcula:

sen β = ________ cos β = ________ tan β = ________

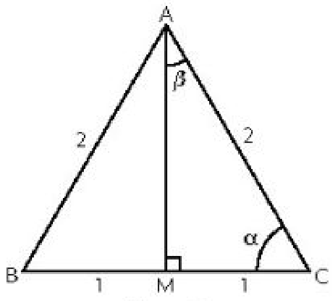


Figura 8

¿Es posible generalizar los resultados de la actividad anterior? ________ Si en un triángulo rectángulo la hipotenusa mide a y un cateto mide $\frac{a}{2}$, ¿cuáles son las medidas de sus ángulos? ________ ¿Cuánto mide el otro cateto en términos de a? ________ ¿Cuál es el valor de las razones seno, coseno y tangente para cada uno de los ángulos agudos del triángulo rectángulo? ________

2. En equipos de tres alumnos, analicen el triángulo *PQR* de la figura 9 y respondan las preguntas que se plantean.

a) Según la medida de sus lados, ¿qué tipo de triángulo es *PQR*? ________

¿Y de acuerdo con la medida de sus ángulos? ________

b) ¿Cuánto mide α? ________ ¿Y β? ________

c) ¿Cuál es la longitud de la hipotenusa? ________

d) Calcula:

sen α = ________ cos α = ________ tan α = ________

sen β = ________ cos β = ________ tan β = ________

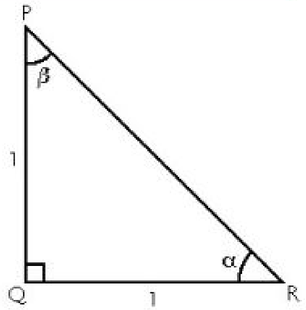


Figura 9

Con la información de los incisos anteriores, completen la tabla 25.2.

Tabla 25.2. Razones trigonométricas de los ángulos notables

A	30°	40°	60°
sen *A*			
cos *A*			
tan *A*			

Comparen sus resultados con los del resto del grupo. Si hay discrepancia en las respuestas, intercambien argumentos y lleguen a un acuerdo. Comenten en el grupo las ventajas de tener a la mano una tabla de valores como la 25.2; escriban algunas ventajas de esto. ________

Analicemos la partida

Edificios que se hunden

Considera la figura 10.

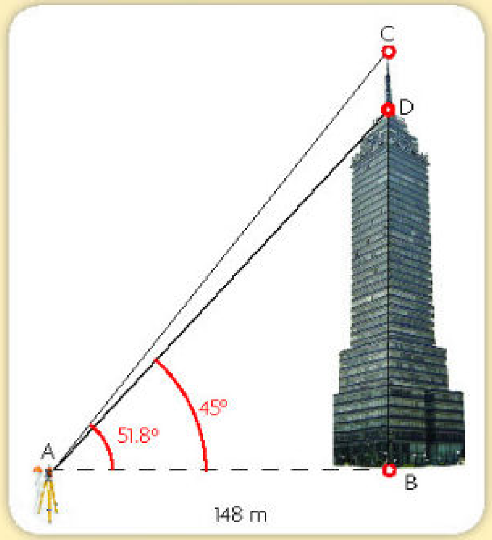


Figura 10

a) En la figura 10, ¿el triángulo *ABC* es un triángulo rectángulo? ________ ¿Por qué? ________

Si no lo fuera, ¿es factible suponer que es triángulo rectángulo para calcular la altura del edificio y el tamaño de la antena? ________ ¿Por qué? ________

b) ¿Cuánto mide la altura de la Torre Latinoamericana (incluyendo la antena) si el ángulo de elevación de la línea de visión del teodolito es de 51.8°? ________

c) ¿Cuánto mide la distancia $\overline{AC}$? ________

d) ¿Qué datos son necesarios para poder calcular la altura de la antena? ________

¿Cuánto mide la antena? ________ ¿Cuánto mide la Torre sin antena? ________

Para resolver un problema que involucre algún triángulo rectángulo dispones ya de distintas herramientas matemáticas: semejanza de triángulos, el teorema de Pitágoras y las razones trigonométricas. ¿En qué casos puedes emplear cada herramienta? Justifica tu respuesta para cada caso. ________

26. Razón de cambio de un proceso

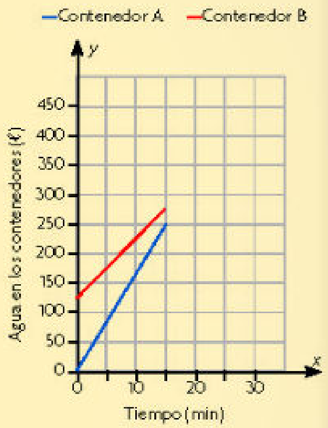
Contenido 4.6. Cálculo y análisis de la razón de cambio de un proceso o fenómeno que se modela con una función lineal. Identificación de la relación entre dicha razón y la inclinación o pendiente de la recta que la representa.

Jaque al rey

Agua pura, cristalina y... suficiente

El sistema de control de una planta purificadora de agua se encarga del llenado de los distintos contenedores. Con este mecanismo automatizado es posible conocer, en todo momento, la cantidad de agua que se tiene en cada contenedor observando la gráfica de una pantalla.

En cierto momento, el sistema muestra el llenado simultáneo de los contenedores A y B desplegando la gráfica 26.1.



Gráfica 26.1. Llenado de los contenedores A y B

¿Cuánto tiempo ha transcurrido desde que se empezaron a llenar los contenedores? ______

Transcurrido ese tiempo, ¿cuál de los contenedores tiene mayor cantidad de agua? ______

Después de transcurridos 50 minutos, ¿qué contenedor tendrá más agua? ______
¿Por qué? ______

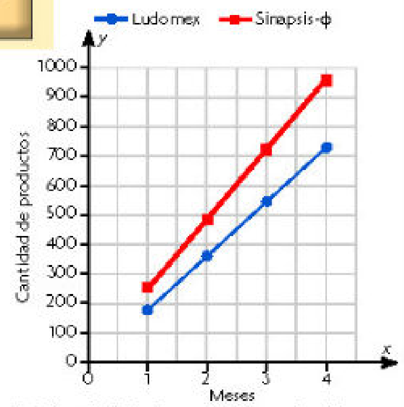
Si cada contenedor se llena por medio de una válvula distinta, ¿de qué válvula salen más litros de agua por minuto? ______. Justifica tu respuesta. ______

______

Apertura

▶ Cálculo y análisis de la razón de cambio

1. En la gráfica 26.2 se muestra la cantidad de juguetes producidos mensualmente en las empresas Ludomex y Sinapsis-ϕ.



Gráfica 26.2. Juguetes producidos por las empresas Ludomex y Sinapsis-ϕ

a) ¿Cuántos juguetes produjo la empresa Ludomex en el mes 1? ______. ¿Y en el mes 2? ______. ¿Cuántos juguetes produjo hasta el mes 3? ______

b) Del mes 2 al mes 4, ¿cuántos juguetes produjo la compañía Ludomex? ______.

c) Si la empresa Ludomex mantiene este ritmo de producción, ¿cuántos juguetes producirá hasta el mes 5? ______

¿Cómo se verá la gráfica 26.2 para el mes 5 si la compañía Ludomex mantiene su ritmo de producción? ______

Traza la gráfica en tu cuaderno y explica la respuesta a un compañero ofreciendo argumentos matemáticos.

d) Del mes 1 al mes 3, ¿cuántos juguetes produjo la empresa Sinapsis-ϕ? ______.

e) ¿Cuántos juguetes produce la empresa Sinapsis-ϕ cada mes? ______.

f) ¿Qué empresa produce más juguetes por mes: Ludomex o Sinapsis-ϕ? ______. Justifica tu respuesta. ______

En parejas, respondan esta pregunta: Si las condiciones de producción de ambas compañías permanecen sin cambios, ¿habrá algún mes en el cual la empresa Ludomex alcance o sobrepase la producción de Sinapsis-ϕ? ______. Expliquen por qué. ______

g) ¿Cómo completarías las tablas 26.1 y 26.2 a partir de la información que puede leerse en la gráfica 26.2?

Tabla 26.1. Razón de juguetes producidos por la empresa Ludomex

Ludomex		
Mes	Cantidad de juguetes que se han fabricado	Cociente entre la cantidad de juguetes y la cantidad de meses
1		
2		
3		
4		
5		

Tabla 26.2. Razón de juguetes producidos por la empresa Sinapsis-ϕ

Sinapsis-ϕ		
Mes	Cantidad de juguetes que se han fabricado	Cociente entre la cantidad de juguetes y la cantidad de meses
1		
2		
3		
4		
5		

h) ¿Obtuviste los mismos cocientes en cada renglón de la tabla 26.1? ______. ¿Encontraste los mismos cocientes en cada renglón de la tabla 26.2? ______.

i) Compara los cocientes que obtuviste en la tabla 26.1, correspondiente a la empresa Ludomex, con la cantidad de juguetes que produce esa empresa en cierto mes. ¿Obtuviste el mismo número? ______. Haz lo mismo con la compañía Sinapsis-ϕ. ¿Resulta también la misma cantidad? ______

¿Por qué se obtiene el mismo número en la columna de los cocientes de las tablas 26.1 y 26.2 que al calcular la cantidad de juguetes que produce una empresa cada mes?

______

______.

Razón de cambio

El resultado encontrado cuando se realizan las divisiones en las tablas 26.1 y 26.2 se llama razón de cambio, un cociente que expresa la variación entre cantidades relacionadas entre sí. En el caso de las funciones lineales, esta razón de cambio es constante.

Para la situación de una empresa, la razón de cambio se denomina índice de producción y puede calcularse de la siguiente manera:

$$\text{Razón de cambio o índice de producción} = \frac{\text{incremento en la producción}}{\text{número de meses}}$$

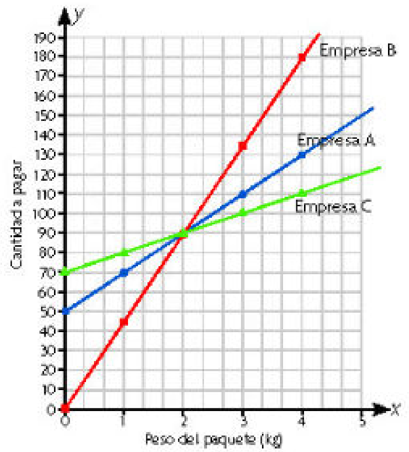
Si se quiere averiguar el índice de producción del periodo que va del mes 2 al mes 4 en la compañía Ludomex, la división es:

$$\text{Índice de producción} = \frac{720 - 360}{4 - 2} = \frac{360}{2} = 180$$

j) De acuerdo con la información del recuadro "Razón de cambio", calcula el índice de producción de la empresa Sinapsis-ϕ del mes 2 al mes 5. ____________.

En equipos de tres alumnos, calculen el índice de producción de la empresa Sinapsis-ϕ correspondiente al periodo comprendido entre los meses 1 y 5. Verifiquen que, efectivamente, esta razón sea constante. Analicen por qué sucede así.

2. En la gráfica 26.3 se representan las tarifas de tres empresas de paquetería en el territorio nacional.



Gráfica 26.3. Tarifas de tres empresas de paquetería

a) Si se desea enviar un paquete que pesa 1 kg, ¿cuál es la empresa más económica? __________ ¿Por qué? __________.

b) Si se quiere enviar un paquete de 2 kg, ¿qué empresa es la más conveniente? __________ ¿Por qué? __________.

c) Y para enviar un paquete que pese 3 kg o más, ¿qué empresa debe contratarse? __________ ¿Por qué? __________.

d) ¿Elegirías la empresa A para hacer un envío? __________ ¿Por qué? __________.

e) ¿Qué significa que las gráficas de las tarifas de las empresas A y C no pasen por el punto (0, 0)? __________.

f) Encuentra la tarifa por kilogramo para enviar un paquete en cada una de las empresas:

i) Tarifa por kilogramo enviado con la empresa A. __________.

ii) Tarifa por kilogramo enviado con la empresa B. __________.

iii) Tarifa por kilogramo enviado con la empresa C. __________.

g) ¿Cuál es la razón de cambio al enviar paquetes de 1 kg a 3 kg por la empresa A? __________.

h) ¿Cuál es la razón de cambio al enviar paquetes de 0 kg a 3 kg por la empresa B? __________.

i) ¿Cuál es la razón de cambio al enviar paquetes de 2 kg a 4 kg por la empresa C? __________.

Una alumna afirma que, para calcular la razón de cambio del envío de paquetes de 1 kg a 3 kg con la empresa A, debe efectuarse la siguiente división:

$$\text{razón de cambio} = \frac{110}{3}$$

$$\text{razón de cambio} = 36.\overline{6}$$

El número 110 representa lo que ha aumentado la cantidad que debe pagarse, en tanto que el número 3 es la cantidad de kilogramos que se envían. ¿Estás de acuerdo con ella? __________. Explica por qué. __________.

La razón de cambio y la pendiente

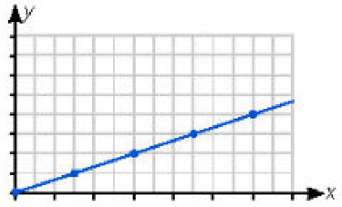
3. Considera de nuevo la gráfica 26.3 sobre las tres empresas de paquetería de la actividad 2.

a) ¿Cuál de las rectas tiene una razón de cambio mayor? __________.

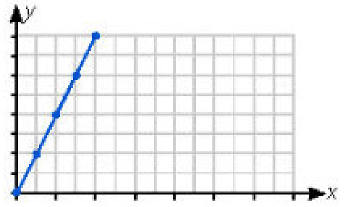
b) ¿Cuál de las rectas tiene una pendiente mayor? __________.

Glosario

pendiente de una recta: valor que indica la inclinación respecto al eje x. Cuanto más vertical es la recta, mayor es su pendiente, tal como se muestra en las gráficas 26.4 y 26.5.



Gráfica 26.4. Recta con menor pendiente



Gráfica 26.5. Recta con mayor pendiente

En la función lineal:

$$y = mx + b$$

el parámetro m es la pendiente.

c) ¿Es cierto que la recta que tiene una razón de cambio menor también tiene una pendiente menor? __________. ¿Por qué? __________.

d) Une mediante una línea la expresión algebraica que corresponde a la relación entre el peso del envío y la tarifa de cada empresa.

Empresa A	$y = 20x + 50$
	$y = x + 45$
Empresa B	$y = 50x + 20$
	$y = 10x + 70$
Empresa C	$y = 70x$
	$y = 45x$

En parejas, propongan un método para verificar que eligieron las funciones correctas.

e) De las funciones que elegiste, ¿cuál es la que tiene un parámetro m mayor?

____

f) ¿Es cierto que la función que elegiste en el inciso *e* corresponde a la recta que en la gráfica 26.3 tiene una pendiente mayor?

____

En equipos, determinen si las siguientes afirmaciones son verdaderas (V) o falsas (F).

_____ En las funciones lineales la razón de cambio es constante.

_____ Para calcular la razón de cambio hay que dividir la variación ocurrida en una de las cantidades entre la variación ocurrida en la otra.

_____ La razón de cambio es el mismo número que el valor de m.

_____ A mayor pendiente, menor valor de m.

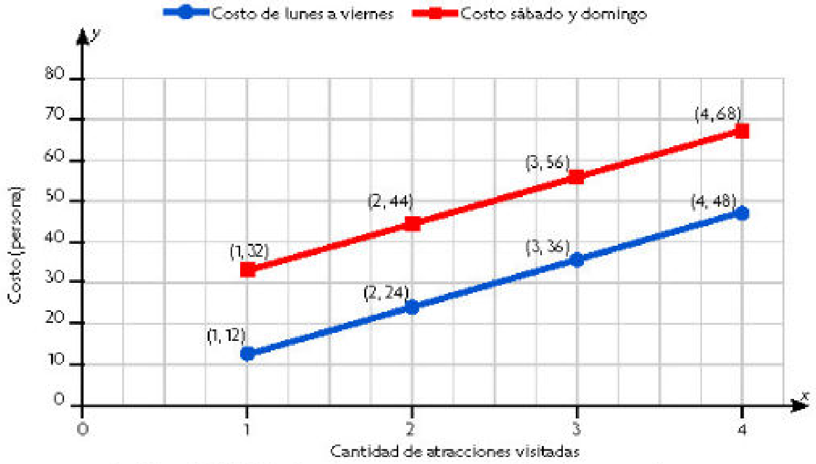
Contrasta tus respuestas con las de otros compañeros e intercambien argumentos para llegar a un consenso sobre cuál es la opción correcta en cada caso.

El mundo en un tablero

Con el propósito de mejorar tus habilidades en torno al uso de la pendiente y la razón de cambio, explora el interactivo. www.bunam.unam.mx/mat_apoyo/MaestrosAlumnos/mApoyo/01/Unidad_2/a10u2t02p07.html (Consulta: 14 de noviembre de 2013.)

Comenta con otro compañero si obtuvieron el mismo resultado y lleguen a un acuerdo si fuera necesario.

4. En la gráfica 26.6 se representa la relación entre la cantidad de juegos y el costo que debe pagar una persona adulta en un parque de diversiones. Los costos dependen de si la visita se hace entre semana o en sábado y domingo.



Gráfica 26.6. Costos de un parque de diversiones entre semana y en sábado y domingo

a) ¿Cuál es la razón de cambio de la recta que representa el costo de lunes a viernes?

____

¿Cuál es su pendiente? _______________

b) ¿Cuál es la razón de cambio de la recta que representa el costo en sábado y domingo?

____

¿Cuál es su pendiente? _______________

c) Escribe una expresión algebraica para cada una de las rectas de la gráfica 26.6.

i) Costo de lunes a viernes: _______________

ii) Costo en sábado y domingo: _______________

d) Explica por qué la cantidad que debe pagarse por tres juegos de lunes a viernes es distinta de la que se paga los fines de semana. _______________

¿La razón de cambio y las pendientes de las rectas de la gráfica 26.6 son iguales entre sí? _____ Justifica tu respuesta. _______________

Alexander afirma lo siguiente: "La razón de cambio y el valor de la pendiente en una recta siempre son iguales". En equipos, analicen y ofrezcan argumentos que justifiquen o desmientan la afirmación de Alexander. Escriban su conclusión. _______________

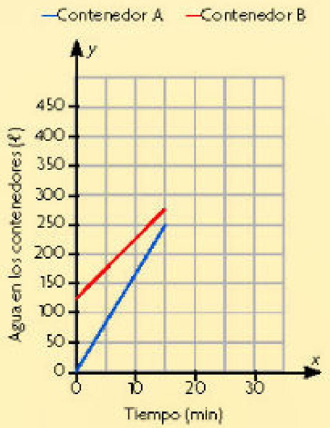
____

Con la guía de su maestro, organicen una plenaria con el propósito de comentar las razones de cada equipo en torno a si la pendiente y la razón de cambio siempre tienen el mismo valor.

Analicemos la partida

Agua pura, cristalina y… suficiente

Utiliza la gráfica 26.1*a* para contestar las preguntas sobre los contenedores A y B de la planta purificadora.



Gráfica 26.1*a*. Llenado de los contenedores A y B en una planta purificadora

a) ¿Cuántos litros hay en cada contenedor al empezar el llenado? ________________

b) Prolonga las rectas de la gráfica 26.1*a* para determinar, aproximadamente, el punto donde se intersecan. Escribe sus coordenadas. ________________

c) Completa el enunciado: "De los 0 minutos a los ________ minutos (aproximadamente) el contenedor B tiene más agua. Después de ese momento el contenedor A tiene más agua".

e) Encierra en un círculo la palabra que complete correctamente la oración:

"La recta con ____(menor/mayor)____ pendiente es la que representa al contenedor cuya válvula deja pasar más agua por minuto y, por tanto, se llena más rápido".

Explica lo que expresa la razón de cambio en este ejemplo y para qué puede ser útil conocerla. Comenta tu respuesta con el resto del grupo. ________________

27. Medidas de dispersión

Contenido 4.7. Medición de la dispersión de un conjunto de datos mediante el promedio de las distancias de cada dato a la media (desviación media). Análisis de las diferencias de la "desviación media" con el "rango" como medidas de la dispersión.

Jaque al rey

¿Futbol-fuerza o futbol-talento?

La directiva de tres equipos de futbol de segunda división profesional quiere mejorar el desempeño de sus escuadras y estudia varios factores que podrían influir en su rendimiento. Dos directores deportivos[1] consideran que la estatura se relaciona directamente con la fuerza, la agilidad y la velocidad de los deportistas. El otro, en cambio, está convencido de que la estatura no es un factor decisivo, ya que no refleja el talento futbolístico de los jugadores.

Se genera, pues, una polémica y deciden que, antes de hacer cualquier cambio en sus equipos, analizarán las estaturas de sus jugadores (tablas 27.1, 27.2 y 27.3) y los logros obtenidos en las últimas cinco temporadas.

Tabla 27.1. Estaturas del Atlético Piñeiro

Equipo Atlético Piñeiro	
Nombre	Estatura (cm)
Francisco Beckenbauer	169
Pelé Martínez	170
Ronaldo Benítez	178
Rosendo Falcao	181
Hugo Vázquez	193
Jorge Kam Posh	188
Robinho Do Nascimiento	168
Luciano Di Stefano	179
Diego Armando Gaona	180
David Benjam	187
Rodrigueiro Dos Santos	180

Tabla 27.2. Estaturas del Perla de Occidente

Equipo Perla Occidente	
Nombre	Estatura (cm)
Ronaldinho Chávez	190
Alejandro Fonseca	170
Javier Sabah	172
Salvador Marín	174
Neymar Pérez	178
Joel Batistuta	167
Héctor Baldano	170
Jesús Butragueño	168
José Gullit	175
Alfredo Cardozo	175
Federico Carbajal	176

Tabla 27.3. Estaturas del Oca Júnior

Equipo Oca Júnior	
Nombre	Estatura (cm)
José Guadalupe Podolski	186
Cristiano Rolando	187
Artemio Ballack	185
Pánfilo Llorente	167
Evodio Beñat	173
Jesús Fellaini	191
Crisóstofo Croif	184
Shavi Alfonso	169
Raphael Mark Esh	174
Airton Chávez	184
Ruperto Zidane	175

Contesta las preguntas elaboradas por la directiva de los tres equipos, con el propósito de analizar las estaturas de los jugadores de sus planteles titulares.

¿En qué equipo la estatura promedio de los jugadores es mayor? ________________
¿En cuál es mayor la diferencia entre el jugador más alto y el más bajo? ________________
¿En qué equipo las estaturas de los jugadores son más parecidas entre sí? ________________

[1] El director deportivo de un equipo profesional es la persona responsable de gestionar el capital humano, es decir, los deportistas que forman parte de un club. Además, se encarga de tareas de planeación deportiva, y supervisa la misión y el desempeño de los valores de un equipo.

Apertura

Rango y promedio

1. En la tabla 27.4 se muestran las calificaciones de algunas estudiantes en el bimestre pasado. En parejas, completen los enunciados de manera que sean verdaderos y justifiquen sus respuestas.

Tabla 27.4. Calificaciones de algunas estudiantes en el bimestre pasado

	Calificaciones
Giovanna	10, 8, 9, 9, 9, 10, 10, 8, 0
Marisol	6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6
Yadira	5, 3, 9, 10, 5, 2, 6, 10, 4
Itzel	6, 6, 5, 5, 6, 0, 4, 8, 5
Guadalupe	10, 9, 10, 10, 7, 9, 10, 8, 5

Glosario

dispersión de un conjunto de datos: se refiere al grado de variabilidad que presentan los datos. Esta variabilidad puede medirse con distintos indicadores: cuanto mayores sean dichos indicadores, mayor será la variabilidad que existe entre los datos; se dice entonces que hay mayor dispersión.

a) Observen sólo las calificaciones de Itzel y Yadira. ¿De quién de ellas las calificaciones son más cercanas entre sí? ________. ¿Por qué? ________

b) De estas alumnas, las calificaciones de ________ están menos dispersas.

c) Hay un rango mayor en las calificaciones de ________. ¿Por qué? ________

d) ________ y ________ tienen el mismo promedio, pero las calificaciones de ________ están más dispersas.

e) ________ tiene el promedio menor, pero en sus calificaciones existe el mismo rango que en las de ________.

Contrasten sus respuestas con las de otras parejas. Si hay diferencias, analícenlas y, con la guía de su maestro, lleguen a un acuerdo. Después, respondan las preguntas que se plantean.

- ¿El rango se ve afectado por el promedio? ________. ¿Por qué? ________
- ¿El promedio se ve afectado por el rango? ________ ¿Por qué? ________

Den algunos ejemplos para explicar sus respuestas.

Glosario

rango: indicador de la dispersión; se refiere a la diferencia entre el valor mayor y el valor menor de un conjunto de datos. Permite medir la variabilidad y da cierta información sobre qué tan disperso puede ser un conjunto de datos. Si el rango es pequeño puede indicar que los valores son cercanos entre sí.

2. En una fábrica se registra la producción de tres máquinas. En la tabla 27.5 se muestran los datos correspondientes al número de productos manufacturados por cada máquina en los últimos 12 días.

Tabla 27.5. Registro de la producción de tres máquinas durante 12 días

Días	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Máquina A	50	51	55	28	49	47	53	31	51	53	30	52
Máquina B	26	25	28	27	22	30	29	23	26	28	28	29
Máquina C	37	40	20	35	38	41	53	21	39	32	31	34

a) ¿Qué máquina presenta mayor rango en la producción? ________. ¿Por qué? ________. ¿Qué significa esto respecto a la variabilidad en la producción? ________.

b) El rango en la producción de la máquina ________ es el menor. ¿Es también la máquina cuyo promedio de producción es menor? ________

c) El rango en la producción de la máquina ________ es el mayor. ¿Es también la máquina cuyo promedio de producción es mayor? ________

d) En la producción de la máquina ________ existe el rango mayor. ¿En su producción hay mayor variabilidad? ________

e) ¿Cuál de las tres máquinas tiene una producción más homogénea? ________ ¿Por qué? ________

En parejas, comenten las respuestas que dieron en los incisos anteriores.

En este caso, ¿es cierto que el conjunto de datos cuyos valores son más cercanos entre sí tienen un rango menor? ________. ¿Es cierto que el conjunto de datos cuyos valores son más dispersos entre sí tienen un rango mayor? ________. ¿Por qué? ________

Si dos conjuntos de datos tienen la misma media pero con rangos diferentes, ¿tienen la misma dispersión? ________. Justifiquen su respuesta.

Desviación media, rango y promedio

Tabla 27.4*a*. Calificaciones de algunas estudiantes en el bimestre pasado

	Calificaciones
Giovanna	10, 8, 9, 9, 9, 10, 10, 8, 0
Marisol	6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6
Yadira	5, 3, 9, 10, 5, 2, 6, 10, 4
Itzel	6, 6, 5, 5, 6, 0, 4, 8, 5
Guadalupe	10, 9, 10, 10, 7, 9, 10, 8, 5

1. Considera nuevamente las calificaciones que analizaste en la actividad 1 del apartado "Rango y promedio" (tabla 27.1*a*).

a) Para cada estudiante, describe la dispersión de los datos respecto a su promedio.

- Giovanna: ________
- Marisol: ________
- Yadira: ________
- Itzel: ________
- Guadalupe: ________

b) ¿Cuáles son los más dispersos respecto al promedio? ________ ¿Y los menos dispersos? ________ Explica por qué. ________

Desviación media

Otra manera de medir la dispersión es observar los valores respecto al promedio. La desviación media es una medida de dispersión mediante la cual se puede conocer el promedio de las distancias de todos los datos respecto a la media aritmética.

Para calcularla hay que obtener el valor absoluto de la diferencia entre cada dato y el promedio, sumar estas diferencias y dividirlas entre el número de datos (n).

$$\text{desviación media} = \frac{|\text{dato}_1 - \text{promedio}| + |\text{dato}_2 - \text{promedio}| + \ldots + |\text{dato}_n - \text{promedio}|}{n}$$

Por ejemplo, en el caso de las calificaciones de Yadira:

$$\text{desviación media} = \frac{|5-6| + |3-6| + |9-6| + |10-6| + |5-6| + |2-6| + |6-6| + |10-6| + |4-6|}{9} = \frac{22}{9} = 2.4\overline{4}$$

c) De acuerdo con la información del recuadro "Desviación media", calcula la desviación media de las calificaciones de las siguientes estudiantes:

- Giovanna: ________________.
- Marisol: ________________.
- Itzel: ________________.
- Guadalupe: ________________.

¿Los valores que obtuviste son acordes con las descripciones hechas en el inciso *a*? ________________. Justifica tu respuesta. ________________.

d) ________________ y ________________ tienen el mismo promedio, pero las calificaciones de ________________ están más dispersas.

e) La desviación media de las calificaciones de Itzel y Guadalupe es la misma, pero como existe un rango menor en los datos de ________________ se puede afirmar que sus calificaciones están menos dispersas.

f) El rango que existe en las calificaciones de ________________ es igual al que hay entre las calificaciones de ________________, pero la desviación media no es igual. ¿Las calificaciones de quién de ellas están más dispersas? ________________. Explica por qué. ________________.

g) Las calificaciones de ________________ tienen una desviación media igual a cero y el rango que existe en ellas es también igual a cero. ¿Qué puedes decir respecto a su dispersión? ________________

Reúnete con dos compañeros para analizar la siguiente información. ¿Están de acuerdo con todos los enunciados, con algunos de ellos o con ninguno? Justifiquen las respuestas en su cuaderno.

- Si el valor del rango es pequeño, los datos serán cercanos entre sí.
- Si el valor del rango es grande, los datos no serán cercanos entre sí.
- Si el valor de la desviación media es pequeño, los datos serán cercanos entre sí.
- Si el valor de la desviación media es grande, los datos no serán cercanos entre sí.

4. Considera de nuevo los datos analizados en la actividad 2 sobre la producción de tres máquinas (tabla 27.5*a*).

Tabla 27.5*a*. Registro de la producción de tres máquinas durante 12 días

Días	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Máquina A	50	51	55	28	49	47	53	31	51	53	30	52
Máquina B	26	25	28	27	22	30	29	23	26	28	28	29
Máquina C	37	40	20	35	38	41	53	21	39	32	31	34

a) Para cada máquina describe la dispersión de los datos considerando tanto el rango como la desviación media.

- Máquina A: ________________
- Máquina B: ________________
- Máquina C: ________________

b) ¿Es cierto que en los datos de la máquina que presenta una desviación media mayor también existe un rango mayor, en comparación con las otras máquinas? ________. Explica por qué. ________________.

c) ¿Es cierto que en los datos de la máquina que presenta una desviación media menor también existe un rango menor, en comparación con las otras máquinas? ________. ¿Por qué? ________________.

¿Puede existir un conjunto de datos cuya desviación media sea pequeña y su rango sea grande? ________________. Y viceversa: ¿un conjunto de datos cuyo rango sea pequeño y su desviación media sea grande? ________________

¿La desviación media permite saber qué tan cercanos están los datos respecto al promedio? ________. ¿Por qué? ________________.

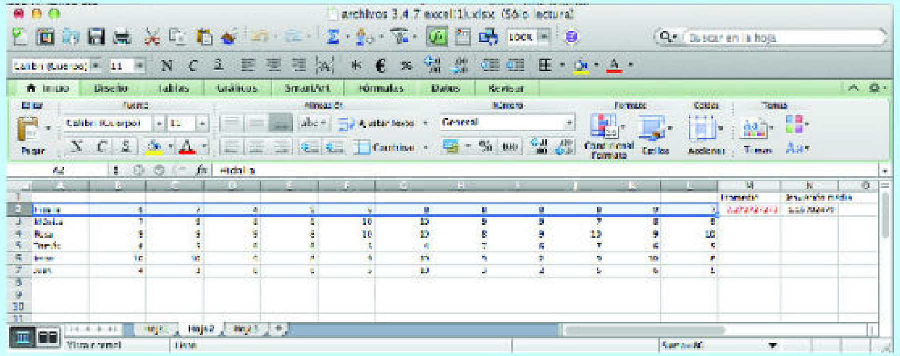
¿La desviación media se ve afectada por los datos extremos? ______. ¿Por qué? ________________

Apoya tus ideas con ejemplos.

El mundo en un tablero

Con el propósito de mejorar tus habilidades en el uso de las medidas de dispersión, utiliza una hoja de cálculo para encontrar el promedio y la desviación media.

1. Introduce los datos.
2. En una casilla vacía, escribe =promedio(, selecciona los datos que quieras incluir en el cálculo y cierra el paréntesis. Por ejemplo: =promedio(B2:L2).
3. Para la desviación media debes escribir =desvprom(B2:L2).



Trabaja con un compañero, calculen el promedio y la desviación media de los datos de producción de las máquinas B y C.

¿Llegaron a los mismos resultados de la actividad 4? ________________.

Calculen el promedio y la desviación media de las calificaciones de la actividad 3 y verifiquen sus respuestas.

5. Escribe conjuntos de datos con las siguientes características:

a) Cinco calificaciones de Raúl que tengan una desviación media pequeña y un promedio mayor que las de Mónica.

b) Cinco calificaciones de Mónica que tengan una desviación media mayor que las calificaciones de Raúl.

Intercambia tu libro con otro compañero y analiza los datos que propuso. Calcula el rango, el promedio y la desviación media. ¿Sus datos cumplen con las características solicitadas?

Analicemos la partida

¿Futbol-fuerza o futbol-talento?

a) Calcula el promedio, el rango y la desviación media de los datos de cada equipo.

b) ¿En qué equipo las estaturas muestran una dispersión mayor? (Considera tanto el rango como la desviación media para responder.) ____________________.

c) ¿La estatura promedio de los jugadores es la representativa del equipo? ____________. Explica por qué. ____________________.

d) Si la estatura promedio no es representativa del equipo, ¿hay alguna forma de encontrar una estatura representativa del equipo? ¿Cuál? ____________________.

e) ¿Consideras que el cálculo de las medidas de dispersión para las estaturas aporta elementos para la discusión de la mesa directiva? __________ ¿Por qué? __________
____________________.

En tu opinión, ¿qué medida de dispersión describe mejor la variabilidad entre los datos de un conjunto: el rango o la desviación media?____________________ Explica por qué. ____________________
____________________.

Se ve bonito, pero qué tal el costo...

SITUACIÓN 1

Para colocar los azulejos en una pared, un albañil procede como se ve en la figura 1.

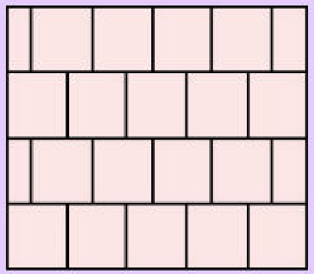


Figura 1

Pregunta 1: ¿Cuántos azulejos necesitará para cubrir una pared cuadrada de ocho azulejos grandes de lado?

Crédito total: Da la respuesta correcta. Plantea la estrategia adecuada para contar el número de azulejos.
Crédito parcial: Su estrategia es correcta, pero comete un error en los cálculos.
Sin crédito: Usa una estrategia incorrecta.

Pregunta 2: ¿Cuántos azulejos requiere para cubrir una pared cuadrada de 26 azulejos pequeños de lado?

Crédito total: Da la respuesta correcta. Plantea la estrategia adecuada para contar el número de azulejos.
Crédito parcial: Su estrategia es correcta, pero comete un error en los cálculos.
Sin crédito: Usa una estrategia incorrecta.

Pregunta 3: En la situación de la pregunta 2, ¿cuántos azulejos debe partir a la mitad?

Crédito total: Da la respuesta correcta. Plantea la estrategia adecuada para contar el número de azulejos.
Crédito parcial: Su estrategia es correcta, pero comete un error en los cálculos.
Sin crédito: Usa una estrategia incorrecta.

Un disfraz congruente

SITUACIÓN 2

Lorena hizo el diseño de una estrella para su disfraz de Halloween (figura 2); los cuatro triángulos verdes son congruentes.

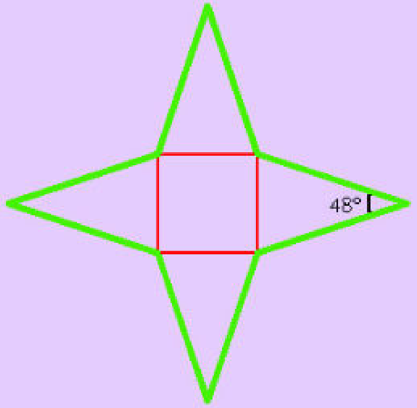


Figura 2

Para trazar las líneas en verde usó 72 cm de cuerda. ¿Cuántos centímetros de cuerda roja necesita para formar el cuadrado central?

Crédito total: Da la respuesta correcta. Plantea la estrategia adecuada para calcular el perímetro del cuadrado.
Crédito parcial: Su estrategia es correcta, pero comete un error en los cálculos.
Sin crédito: Usa una estrategia incorrecta o comete más de un error en los cálculos.

La cuesta de las hormigas

SITUACIÓN 3

Una hormiga se mueve a una velocidad de 0.4 $\frac{cm}{s}$. ¿Cuánto tiempo tardará en subir una cuesta de 3 cm de altura cuyo ángulo de inclinación mide 8° (figura 3)?

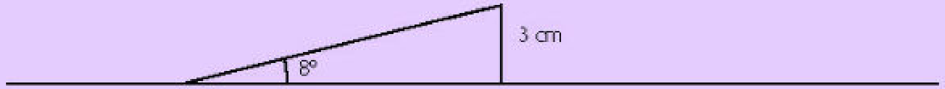


Figura 3

Crédito total: Da la respuesta correcta. Plantea la estrategia adecuada y la lleva a cabo.
Crédito parcial: Su estrategia es correcta, pero comete un error en los cálculos.
Sin crédito: Usa una estrategia incorrecta o comete más de un error en los cálculos.

No nos desviemos, por favor

SITUACIÓN 4

Las siguientes preguntas se relacionan con el lanzamiento de un dado.

Pregunta 1: Se lanza un dado seis veces y en las seis ocasiones se obtienen números distintos. ¿Cuál es la desviación media y el rango de este conjunto de números?

Crédito total: Da la respuesta correcta.
Crédito parcial: Calcula correctamente uno de los parámetros pedidos.
Sin crédito: No calcula correctamente ninguno de los parámetros.

Pregunta 2: Se lanza el dado tres veces. El conjunto de números obtenidos tiene una desviación media de 2 y un rango de 4. La suma de los tres números es un número par. ¿Cuáles son estos números?

Crédito total: Da la respuesta correcta. Plantea la estrategia adecuada y la lleva a cabo.
Crédito parcial: Su estrategia es correcta, pero comete un error en los cálculos.
Sin crédito: Usa una estrategia incorrecta o comete más de un error en los cálculos.

Pregunta 3: Considera las siguiente series de cuatro tiradas: A = {1, 1, 5, 5}, B = {1, 3, 3, 5} y C = {3, 3, 3, 3}.

Escribe en la línea una V si el enunciado es verdadero o una F si es falso.

a) A y B tienen el mismo rango. ______

b) A y B tienen la misma desviación media. ______

c) En C, la desviación media y el rango coinciden. ______

d) En C, la desviación media, el rango y la media valen 3. ______

e) Los tres casos tienen la misma media. ______

En cada inciso:
Crédito total: Da la respuesta correcta en todos los incisos.
Sin crédito: La respuesta es incorrecta en por lo menos cuatro incisos.

Bloque 5

Aprendizajes esperados:

- Resuelve y plantea problemas que involucran ecuaciones lineales, sistemas de ecuaciones y ecuaciones de segundo grado.
- Resuelve problemas que implican calcular el volumen de cilindros y conos o cualquiera de las variables que intervienen en las fórmulas que se utilicen. Anticipa cómo cambia el volumen al aumentar o disminuir alguna de las dimensiones.
- Lee y representa, gráfica y algebraicamente, relaciones lineales y cuadráticas.
- Resuelve problemas que implican calcular la probabilidad de eventos complementarios, mutuamente excluyentes e independientes.

Competencias que se favorecen:

Resolver problemas de manera autónoma.
Comunicar información matemática.
Validar procedimientos y resultados.
Manejar técnicas eficientemente.

En diferentes situaciones —la apertura de un negocio, la ocurrencia de un desastre, la compra de un seguro, entre otras—, un análisis de probabilidad es indispensable. En medicina, antes de hacer una cirugía, su éxito se puede estimar mediante un cálculo de probabilidades.
Instrumentos en una sala de operaciones

28. Ecuaciones lineales, cuadráticas y sistemas de ecuaciones

Contenido 5.1. Resolución de problemas que implican el uso de ecuaciones lineales, cuadráticas o sistemas de ecuaciones. Formulación de problemas a partir de una ecuación dada.

Jaque al rey

Grande y llamativa

Víctor y Manuel han decidido invertir su capital en la construcción de dos gasolineras en lados opuestos de la calle (figura 1).

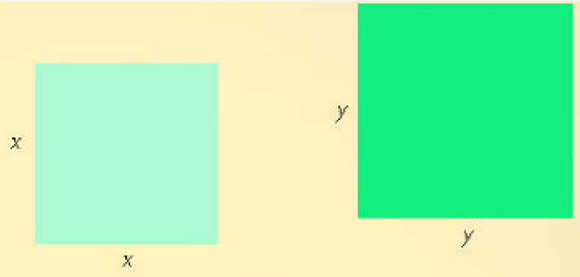


Figura 1

Víctor: Del lado derecho voy a poner mi gasolinera, y sin duda será mucho más grande y llamativa que la tuya.

Manuel: No creo que tanto, eh. Te recuerdo que tu terreno sólo mide un metro más de cada lado que el mío, y eso, en realidad, no es mucha diferencia.

Víctor: Aunque los terrenos son cuadrados y su diferencia de lado es sólo de un metro, el área del mío será considerablemente mayor.

Manuel: Pues no me convencen tus argumentos; después de todo, entre los dos terrenos suman 265 m^2. Si pongo en proporción mi terreno con el total te darás cuenta de que no hay tanta diferencia.

¿Cuántos metros mide el perímetro de cada terreno? ____________________
¿Cuántos metros cuadrados mide la superficie de cada terreno? ____________________
¿Quién tiene la razón: Víctor o Manuel? __________ Explica por qué. ____________________
____

Apertura

Resolución de problemas

1. En parejas, analicen y resuelvan los problemas. Asegúrense de haber comprendido de la misma manera lo que se plantea en cada uno; si no, soliciten la ayuda de otro compañero o de su maestro para llegar a un acuerdo.

a) La suma de dos números es igual a 47 y la diferencia entre ellos es igual a 3. ¿De qué números se trata? ____________________

i) Encierra en un círculo la opción en la cual se planteó correctamente el problema.

$x + y = 47$ $x - y = 3$	$x + y = 47$ $xy = 3$	$x + y = 47$ $\frac{x}{y} = 3$

ii) Subraya la opción en la que se sustituyó de forma correcta una de las variables.

$x = 3 - y$ $3 - y + y = 47$	$x = 3 + y$ $3 + y + y = 47$	$x = 3 + y$ $3 + y + x = 47$

iii) ¿Cuáles son los números buscados? ____________________

b) La suma de dos números es igual a 7 y su producto es igual a −60. ¿Qué números son?

i) Encierra en un círculo la opción en la que se planteó correctamente el problema.

$x + y = -60x$ $xy = 7$	$x + y = 7$ $xy = -60$	$x + 7 = y$ $xy = -60$

ii) Subraya la opción en la que se hizo correctamente la sustitución de una de las variables.

$x = 7 - y$ $(7 - y)(y) = -60$	$x = 7 + y$ $(7 + y)(y) = -60$	$x = y - 7$ $(y - 7)(y) = -60$

iii) ¿Cuáles son los números buscados? ____________________

c) Si cierta cantidad de agua de jamaica se reparte entre 20 niños, les toca de a 2.8 vasos a cada quien. Si la misma cantidad de agua se repartiera entre 16 niños, ¿cuántos vasos le tocarían a cada uno?

i) Encierra en un círculo la opción en la cual se planteó de manera correcta el problema.

$(20)(2.8) = k$ $x = 16k$	$20 \div 2.8 = k$ $k = 16x$	$(20)(2.8) = k$ $x = \frac{k}{16}$

ii) ¿Cuánta agua había en total y cuántos vasos le tocan a cada uno de los 16 niños?

____

¿En cuál o en cuáles de estos problemas hay que plantear una ecuación cuadrática para hallar la solución? __________ ¿En alguno debe plantearse un sistema de ecuaciones? __________ ¿En cuál? __________ Argumenta tus respuestas y coméntalas con el resto del grupo.

2. Resuelve los siguientes problemas.

a) La suma de dos números es igual a 51 y su producto es igual a 144. ¿De qué números se trata? ____________________

b) En una papelería, el miércoles pagué \$96 por 5 cuadernos y 4 lapiceros, mientras que el jueves pagué \$117 por 6 cuadernos y 5 lapiceros. ¿Cuánto cuesta cada artículo?

____

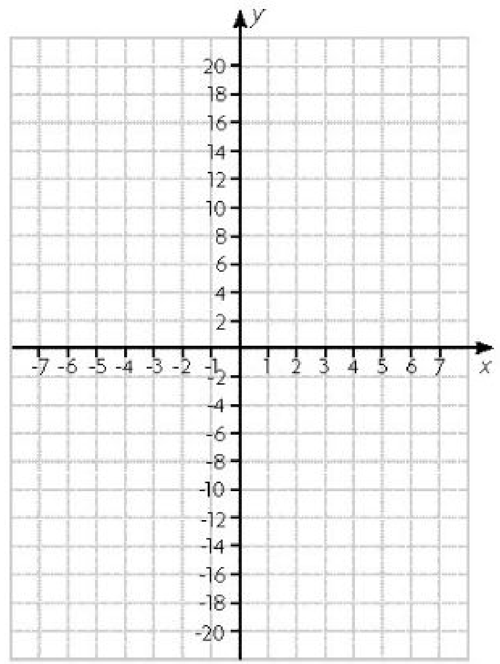
c) Sustituyendo los valores de x en la función $y = x^2 - 5x + 5$, completa la tabla 28.1.

Tabla 28.1. Valores de la función $y = x^2 - 5x + 5$

x	0	1	2	3	4	5	6
y							

i) Calcula los dos valores de x (con una cifra decimal) con los que el valor de y sea lo más cercano a 0.

ii) Traza la gráfica de la función en el plano cartesiano de la gráfica 28.1.



Gráfica 28.1. La función $y = x^2 - 5x + 5$

d) Subraya el enunciado con el que se encuentran las intersecciones de la función $y = x^2 - 5x + 5$ con el eje de las abscisas.

- El cuadrado de un número menos 5 veces ese número es igual a 5.
- El cuadrado de un número menos 5 veces ese número, más 5, es igual a 0.
- El cuadrado de un número menos 5 veces ese número, más 5, es igual a −5.

¿La función corta al eje x en los valores que calculaste? __________ ¿Por qué?

____

Resuelve la ecuación y verifica tu respuesta.

x_1 = ______ x_2 = ______

3. Plantea la ecuación que modela cada problema y resuélvelas.

a) Se eleva al cuadrado el doble de un número entero menos 1 y eso es igual al cuadrado del número más 5. ¿De qué número se trata? ______

b) Un triángulo tiene un área de 24 cm² y la altura mide 2 cm más que la base. ¿Cuánto mide la altura? ______

¿Anteriormente has resuelto algún problema similar a los planteados? ______
¿Qué situaciones de la vida cotidiana podrían modelarse con ecuaciones lineales o bien con ecuaciones cuadráticas? Reúnete con dos compañeros e investiguen en libros de ciencias o en internet un par de fenómenos que se representen con ecuaciones lineales y un par con ecuaciones cuadráticas. En plenaria, comenten los resultados de su investigación.

Diseño de problemas

1. En parejas, escriban un problema para cada una de las ecuaciones y resuélvanlo. Después, intercámbienlos con los de otra pareja a fin de verificar que los problemas correspondan a las ecuaciones que los modelan y se hayan resuelto correctamente.

a) $2x + 4 = 10$ ______

b) $x(x + 1) = 156$ ______

c) $x + y = 39$
$xy = 248$ ______

Comenten los problemas propuestos por sus compañeros. ¿Son claros y comprensibles? ¿Les faltan o les sobran datos? Y sobre todo: ¿tienen sentido? Si es necesario, corríjanlos y discutan con los autores las modificaciones.

2. Escribe un valor para el coeficiente del término de primer grado, de tal manera que la ecuación $x^2 -$ ____ $x + 36 = 0$ tenga una solución.

Para la misma ecuación $x^2 -$ ____ $x + 36 = 0$ escribe ahora un valor tal que tenga dos soluciones.

Sugerencia: Con el valor del discriminante ($b^2 - 4ac$) es posible saber cuántas soluciones tendrá una ecuación cuadrática.

¿Cuántas soluciones tendrá la ecuación si el coeficiente del término lineal es igual a 11? Coméntalo con un compañero.

3. Escribe una ✓ en las ecuaciones que modelan cada problema.

Ecuación(es)		Problemas
$3x - y^2 = 39$ $y + x = 28$	____	El triple de la edad de David menos el doble de la edad de Gabriel es igual a 39. La edad de Gabriel más la edad de David es igual a 28.
$3x - 2y = 39$ $y + x = 28$	____	
$3x + 1 = y$ $4x - 2 = y$	____	El costo de 3 chicles más 1 peso es igual al costo de un chocolate. El costo de 4 chicles menos 2 pesos es igual al costo de un chocolate.
$x + 3 + 1 = y$ $x + 4 - 2 = y$	____	
$2x + 2y = 130$ $(x)(y) = 1050$	____	El perímetro de un terreno rectangular mide 130 m y su área mide 1 050 m².
$x + y = 130$ $(x)(y) = 1050$	____	

b) Resuelve las ecuaciones que modelan los problemas.

Edad de David: ______. Edad de Gabriel: ______.

Costo de un chicle: ______. Costo de un chocolate ______.

Medidas de los lados del terreno: ______ y ______

Explica por qué las ecuaciones que no elegiste son inapropiadas para modelar cada uno de los problemas.

El mundo en un tablero

Con el propósito de mejorar tus habilidades al resolver problemas, visita la página http://www.acienciasgalilei.com/mat/problemas/ejerclmat-sistecuadin-1.htm (Consulta: 16 de noviembre de 2013.)

En parejas, elijan algunos de los problemas en cada sección y resuélvanlos. Cuando terminen comenten si se resolvieron mediante un sistema de ecuaciones, una ecuación lineal o una cuadrática.

4. Resuelvan los siguientes problemas en equipos de tres alumnos.

a) En una granja hay gallinas y chivos. Si se cuentan las cabezas hay 23, si se cuentan las patas hay 60. ¿Cuántos animales hay de cada uno?

______

b) En una fábrica se envasaron 500 ℓ de agua en 148 botellas de 3 ℓ y de 5 ℓ. ¿Cuántas botellas de 3 ℓ y de 5 ℓ se utilizaron?

______

c) La base de un rectángulo es 2 cm mayor que su altura. Si la base aumenta 1 cm y la altura aumenta 2 cm, el área que resulta es 30 cm² mayor que la del rectángulo original. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo original?

______

Comenten sus soluciones con las de otro equipo. Si hay diferencias, averigüen por qué y determinen cuál es el resultado correcto.

Analicemos la partida

Grande y llamativa

a) ¿Consideras que la situación planteada por Víctor y Manuel se puede simplificar de la siguiente manera: "La diferencia entre la medida del lado de los terrenos es igual a 1, y la suma de sus áreas es igual a 265 m^2"? _________. ¿Por qué? _________

b) Se sabe que:

Los terrenos son cuadrados, así que los lados de cada uno miden lo mismo.

$$y - x = 1$$

A partir de esta relación:

i) Expresa la suma de las áreas en términos de x y y: _________

ii) Medida de x: _________

iii) Medida de y: _________

iv) Medida del área x^2: _________

v) Medida del área y^2: _________

c) Determina el porcentaje de terreno que cada quien tiene respecto al total de 265 m^2.

Plantea un problema similar a éste cambiando las medidas de los lados de los terrenos y la suma de sus áreas. Dáselo a un compañero para que lo resuelva.

29. Cortes en el cilindro y el cono recto

Contenido 5.2. Análisis de las secciones que se obtienen al realizar cortes a un cilindro o a un cono recto. Cálculo de las medidas de los radios de los círculos que se obtienen al hacer cortes paralelos en un cono recto.

Jaque al rey

Una rebanada de cerro

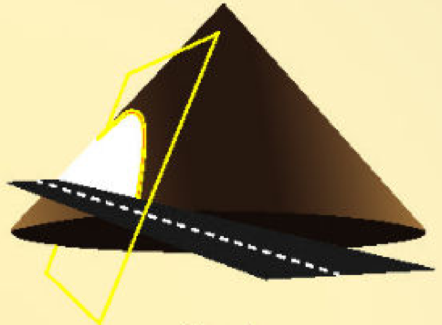


Figura 1

Valentina y Ximena observan y comentan sobre el corte que se hizo en un cerro para que la curva de la autopista sea menos cerrada (figura 1).

—Para construir esta autopista tuvieron que hacer un tajo en ese cerro, ¿verdad? —dice dudando Valentina.

—Sí, es como si hubieran cortado una parte del cerro con un plano inclinado —le explica a su amiga y agrega—: por cierto que el cerro tiene forma de cono.

—¿Pero por qué el corte quedó en forma de curva? ¿Es la mitad de un círculo? —le pregunta Valentina a su amiga, y después de apreciar bien la figura que quedó tras el corte, expresa con curiosidad—: ¿Por qué la figura que quedó no es un rectángulo o un triángulo?

Ximena, que es ingeniera civil, piensa un poco antes de contestar:

—Pues mira, Valentina, cuando un plano corta a un cono se forman ciertas figuras como el...

Considera la situación expuesta en el diálogo de Valentina y Ximena. Al pensar en la forma del cerro, ¿por qué es más sencillo suponer que es la de un cono? _________. ¿Qué formas puede adoptar la sección que se obtiene al cortar un cono con un plano? _________. Descríbelas en tu cuaderno e incluye diagramas para facilitar la respuesta. ¿Es posible que al cortar un cono se obtenga un rectángulo o un triángulo? _________. ¿Por qué? _________

Apertura

▶ Análisis de las secciones que se obtienen al realizar cortes a un cilindro o a un cono recto

1. Trabajen en parejas y consigan tres vasos o recipientes transparentes: uno cilíndrico, otro cónico y otro más esférico, como los mostrados en la figura 2.

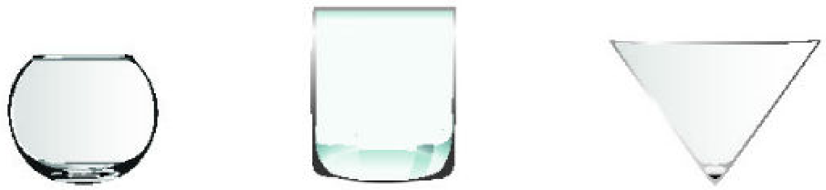


Figura 2

a) Tomen el vaso cilíndrico y agreguen agua de jamaica hasta la mitad; colóquenlo sobre una mesa plana.

b) Observen la superficie del agua. ¿Qué figura se forma? ______.

¿Qué figura forma el agua en el fondo del vaso? ______.

c) ¿Cómo son entre sí las figuras de la superficie del agua y del fondo del vaso? ______.

d) La base del vaso y la superficie del agua se encuentran en planos distintos (figura 3). ¿Qué características tienen dichos planos uno respecto al otro? ______.

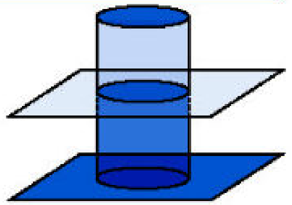


Figura 3

e) Inclinen un poco el vaso como se muestra en la figura 4.

f) ¿Cómo es la superficie del agua dentro del vaso?

______

Dibujen en la figura 4 el contorno de la superficie del agua dentro del vaso.

g) ¿El plano en el que se encuentra la superficie del agua es paralelo a la superficie de la mesa? ______. ¿Y al plano que contiene la base del vaso? ______.

Dibujen el plano que contiene la superficie del agua.

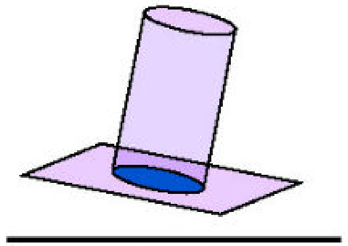


Figura 4

h) Coloquen una bolsa de plástico en la boca del vaso y sujétenla con ligas para que no se derrame el agua. Vayan inclinando el vaso más y más hasta que quede en posición horizontal como en la figura 5.

i) ¿Qué forma adopta la superficie del agua? ______.

Dibujen el contorno de la superficie del agua dentro del vaso.

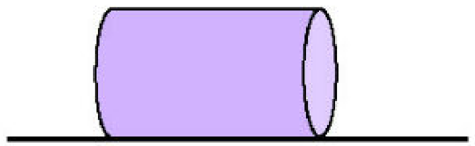


Figura 5

j) ¿Cuáles son las diferencias entre las formas que adopta la superficie del agua con el vaso en posición vertical y con las del vaso colocado horizontalmente? ______

______.

Compartan sus respuestas con las de otras parejas. En plenaria, analicen qué figuras es posible obtener al cortar un cilindro con un plano. Escriban el nombre de cada una y describan sus características. ______.

Dibujen en su cuaderno una secuencia de seis formas que adopta la superficie del agua desde que el cilindro está sobre la mesa hasta quedar de costado.

En la figura 6 dibujen las secciones que se obtienen al cortar un cilindro por medio de un plano en cada uno de los casos que se muestran.

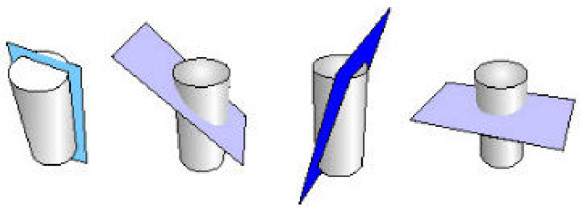


Figura 6

2. En equipos de tres o cuatro alumnos, tomen el recipiente esférico y viertan un poco de agua de jamaica en él (figura 7).

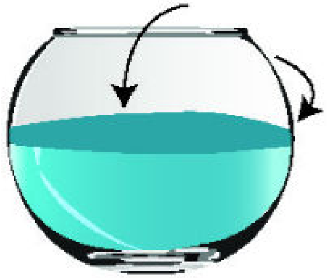


Figura 7

a) Observen la forma que adopta la superficie del agua cuando se coloca el recipiente sobre una mesa plana. ¿Qué figura se forma en la superficie del agua? ______.

b) Giren el recipiente como se sugiere en la figura 7. Comparen las figuras que se obtienen con la del inciso *a*. ¿Qué similitudes y qué diferencias encuentran? ______

______.

¿A qué se deben las diferencias y las similitudes? ______

______.

c) Suponiendo que el recipiente sea una esfera completa de cristal, ¿al rotarla es posible obtener otras formas distintas a la del inciso *a*? ______. ¿Por qué?

______

______.

En su cuaderno dibujen un modelo de una esfera de cristal e indiquen en él las secciones que se obtienen haciendo los cortes con un plano, como se muestra en la figura 8.

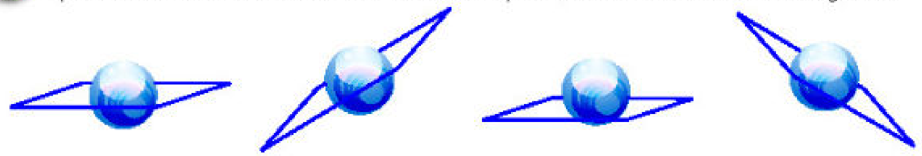


Figura 8

¿Cuántas formas distintas pueden obtenerse en la intersección del plano con la esfera? ______. Den argumentos matemáticos para justificar su respuesta.

3. En parejas, coloquen el recipiente cónico (una copa de cristal, por ejemplo) sobre la mesa y viertan un poco de agua de jamaica en él.

a) ¿Qué forma adopta la superficie del agua? ______.

b) ¿Cómo es la dirección del plano que contiene a dicha superficie respecto al plano de la mesa? ______.

c) Cubran con plástico transparente el borde del recipiente y sujétenlo con ligas para que no se derrame el líquido. Dibujen la forma que adopta la superficie del agua en cada diagrama de la figura 9.

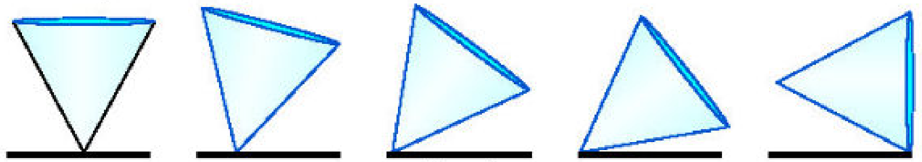


Figura 9

d) ¿Qué forma adopta en el primer caso? ______________ ¿Y en el último caso? ______________

e) ¿Cómo es la forma que adopta la superficie en los casos intermedios? ______________

Contrasten sus respuestas con las de otros equipos. En plenaria, comenten qué figuras distintas es posible obtener. Escriban el nombre de cada una de ellas y describan sus características. ______________

Dibujen las formas de las secciones que se obtienen al cortar un cono por un plano con diferentes inclinaciones en cada uno de los casos que se muestran en la figura 10.

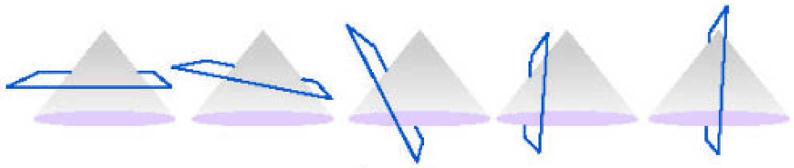


Figura 10

Comparen sus respuestas con la información del recuadro "Cónicas".

Cónicas

Una sección cónica es la intersección de un plano con un cono. Estas secciones —como se muestra en la figura 11— reciben nombres especiales.

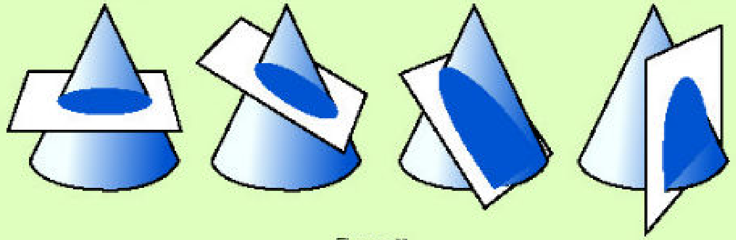


Figura 11

El mundo en un tablero

Para complementar la exploración de las secciones cónicas de esta lección visita la página http://www.disfrutalasmatematicas.com/geometria/conicas-secciones.html (Consulta: 22 de junio de 2013.)

¿Qué conceptos del sitio web se han abordado en esta lección? ______________

¿Las secciones cónicas que se muestran en el sitio se encuentran en los ejemplos que se utilizaron en las actividades de esta lección? ________ ¿Cuáles? ______________

▶ Cálculo de las medidas del radio de la circunferencia en un cono

1. La pantalla de una lámpara produce un haz cónico de luz que se proyecta sobre una mesa (figura 12*a*).
Luego se coloca una cartulina paralela a la mesa, justo a la mitad de la altura de la lámpara (Figura 12*b*).

a) ¿Cuánto mide el radio r del círculo que se proyecta en la cartulina de la figura 12*b*? ______________

b) Dibuja en tu cuaderno el modelo matemático que justifica esta respuesta.

c) Si la cartulina estuviera a $\frac{1}{3}$ de la distancia de la lámpara a la mesa, ¿cuánto mediría r? ______________

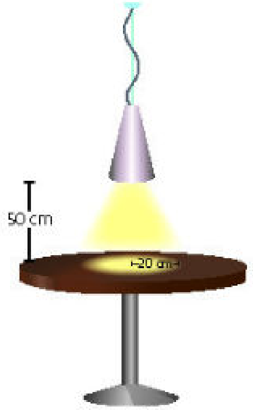


Figura 12*a*

¿A qué altura debe colocarse la lámpara para que la luz cubra la totalidad de la mesa cuyo radio es de 30 cm? ______________

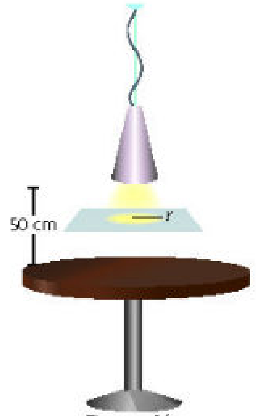


Figura 12*b*

2. En parejas, analicen los recipientes de la figura 13.

a) Representen en el plano cartesiano las gráficas que relacionan la longitud del radio de la circunferencia que forma la superficie del agua en función de la altura que alcanza dicho líquido.

b) Usen el color azul para la gráfica del cilindro, el verde para el recipiente esférico y el rojo para el cónico.

c) ¿Las gráficas son iguales? ________ Justifiquen su respuesta. ______________

d) Describan el tipo de relación que hay entre el radio y la altura en cada caso:

- Cilindro: ______________
- Esfera: ______________
- Cono: ______________

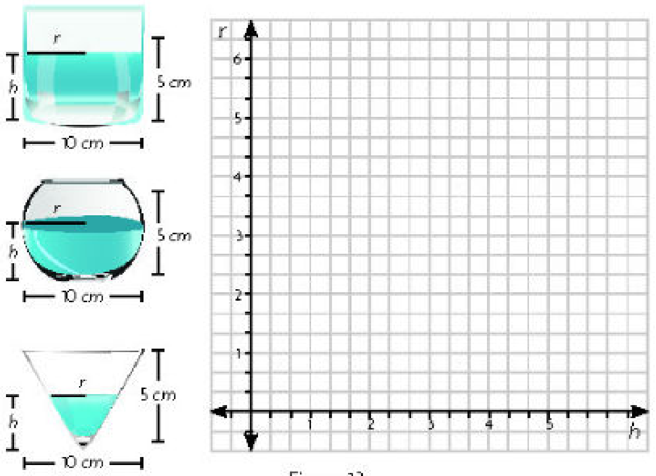


Figura 13

Con la guía de su maestro revisen en grupo las respuestas. Comenten el porqué de la forma de cada gráfica obtenida y escriban algunas conclusiones en su cuaderno.

Analicemos la partida

Una rebanada de cerro

a) Lee de nuevo la conversación de Valentina y Ximena.

b) Observa el modelo geométrico, de la figura 14, que dibujó Ximena para explicarle a Valentina.

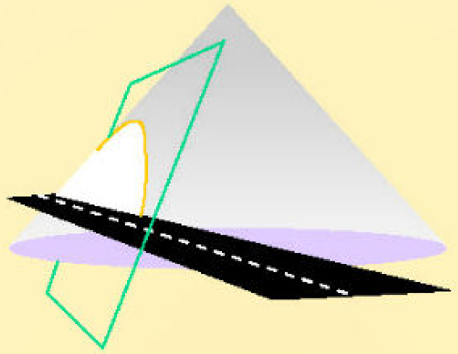


Figura 14

¿Cuál es la forma que, según Ximena, tiene el cerro? ____________________

c) ¿Qué forma tiene la sección que se obtuvo al cortar el cerro con un plano imaginario?

____

____

d) ¿Es posible obtener un círculo al hacer un corte a este cerro? __________ ¿Por qué?

____

____

¿Es posible obtener un rectángulo? __________. ¿Y un triángulo? __________.
Explica tus respuestas. ____________________

____

Escribe en tu cuaderno un reporte de lo que has aprendido en esta lección. Realiza uno o varios diagramas para ilustrar tus ideas.

30. Volumen de cilindros y conos

Contenido 5.3. Construcción de las fórmulas para calcular el volumen de cilindros y conos, tomando como referencia las fórmulas de prismas y pirámides.

Jaque al rey

Un problema de fondo y forma

Los fines de semana Fernanda y Manuel trabajan lavando cisternas y tinacos. En cierta ocasión, los contrataron para lavar dos cisternas de la misma capacidad, sin embargo, antes de empezar la limpieza debían vaciarlas por completo.

Fernanda llevó una cubeta, pero Manuel, menos previsor, únicamente consiguió entre los vecinos un recipiente en forma de cono (figura 1).

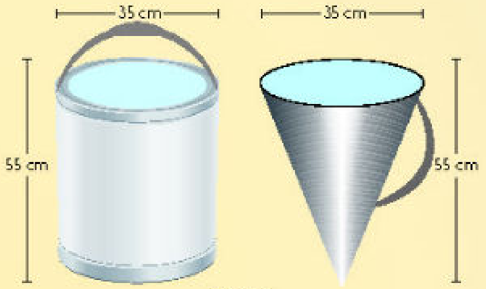


Figura 1

Si Fernanda tardó 15 minutos en vaciar la cisterna que le correspondía lavar, ¿cuánto tiempo tardó Manuel en vaciar la que le tocó si ambas cisternas tenían la misma cantidad de agua? Considera que toma el mismo tiempo sacar la cubeta llena de agua que sacar el cono lleno de agua.

____

Justifica tu respuesta. ____________________

____

Apertura

Glosario

apotema: segmento perpendicular a uno de los lados de un polígono regular, trazado desde el centro del propio polígono.

▶ Construcción de la fórmula para calcular el volumen de un cilindro

1. En equipos de tres alumnos, analicen la siguiente situación. En un jardín circular se construirá una fuente en forma de triángulo equilátero (figura 2).

a) ¿Cuánto mide la apotema a de la fuente triangular? ____________________

b) ¿Cuál es el área de la fuente? ____________________

c) Si en lugar de un triángulo equilátero se construyera una fuente cuadrada como la de la figura 3, ¿cuál sería la medida de su apotema? __________. ¿Cuál sería el área de la fuente? ____________________

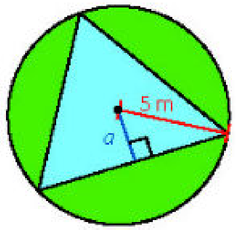


Figura 2

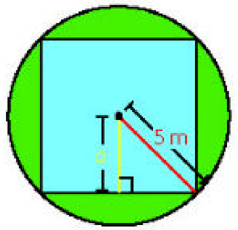


Figura 3

d) Analicen el mismo problema cuando, en lugar del triángulo o el cuadrado, se construyen polígonos regulares con mayor número de lados. Completen la tabla 30.1.

Tabla 30.1. Perímetro y área de polígonos inscritos en un círculo

Núm. de lados del polígono regular	Longitud de la apotema (m)	Perímetro del polígono (m)	Área del polígono (m^2)
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			
11			

i) Describan cómo varía el valor de la apotema conforme aumenta el número de lados del polígono. ____________

ii) ¿La apotema puede aumentar su valor hasta llegar a 5 m? Argumenten matemáticamente su respuesta. ____________

iii) Al aumentar el número de lados de la fuente, ¿cuál es el máximo valor que puede llegar a tener su área? ______. ¿Por qué? ______

iv) ¿Qué relación hay entre el radio *r* del círculo y la apotema *a* del polígono? ____________

v) ¿Qué relación existe entre la longitud de la circunferencia y el perímetro de los polígonos al aumentar el número de lados? ____________

Calcula el área y el perímetro del jardín circular. ____________

Conforme se incrementa el número de lados del polígono inscrito, ¿a qué figura se asemeja dicho polígono? ____________

2. En parejas, tracen en una cartulina círculos cuyo radio mida 10 cm y polígonos inscritos como los de la figura 4.

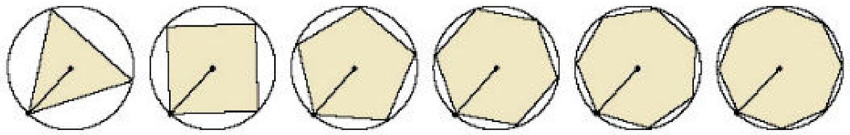


Figura 4

a) Calculen el área de cada polígono. ____________

b) Sobre cada círculo de cartulina construyan un prisma recto (también de cartulina) de 9 cm de altura, y calculen el volumen de cada uno. Con esta información y haciendo los cálculos necesarios, completen la tabla 30.2.

Tabla 30.2. Volumen de un prisma recto conforme aumenta el número de lados de la base

Núm. de lados del polígono de la base	Longitud de la apotema (cm)	Perímetro de la base (cm)	Área de la base (cm^2)	Volumen del prisma (cm^3)
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
11				

c) Con base en la información de la tabla 30.2, contesten las preguntas.

i) ¿Cómo varía el volumen mientras va aumentando el número de lados de los polígonos en la base de los prismas? ____________

ii) ¿De qué manera sugieren que puede calcularse el volumen de un cilindro a partir de lo que han observado en el volumen de los prismas? Justifiquen su respuesta. ____________

Compartan sus respuestas con las de otras parejas y describan en plenaria la forma de obtener el volumen de un cilindro de radio *r* y altura *h*. ____________

Construcción de la fórmula para calcular el volumen del cono

1. En el jardín circular de la figura 5 se va a colocar una estructura metálica con forma de tetraedro.

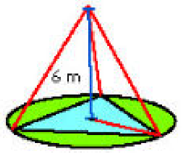


Figura 5

a) Calcula el volumen de la estructura. ____________

b) Determina el volumen de la estructura si se usa una base cuadrada (figura 6). ____________

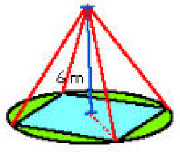


Figura 6

c) Si la pirámide tiene una base en forma de pentágono regular y la misma altura que las otras, ¿su volumen será mayor o menor que el de las anteriores? ______ ¿Por qué? ____________

A partir de los resultados de la actividad 1, responde esta pregunta: "¿Conforme aumenta el número de lados en la base de las pirámides aumenta también su volumen?" ______. Si tu respuesta es afirmativa y se continúa aumentando el número de lados, ¿el volumen aumentará indeterminadamente o hay un valor que nunca rebasará? ____________

¿Por qué? ____________

2. Trabajen en equipos de tres o cuatro alumnos. Tracen en una cartulina círculos de 10 cm de radio y polígonos inscritos como se ve en la figura 7.

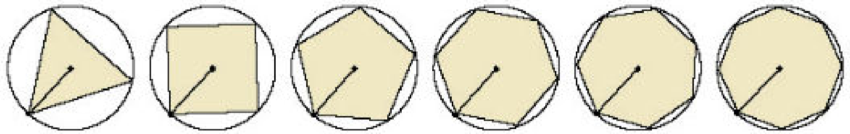


Figura 7

a) Calculen el área de cada polígono de la figura 7. ______

b) Sobre cada círculo de cartulina construyan una pirámide recta (de cartulina) de 9 cm de altura, y calculen sus respectivos volúmenes. Con esa información y haciendo los cálculos necesarios, completen la tabla 30.3.

Tabla 30.3. Volumen de una pirámide conforme aumenta el número de lados de la base

Núm. de lados del polígono de la base	Longitud de la apotema (cm)	Perímetro de la base (cm)	Área de la base (cm²)	Volumen del prisma (cm³)
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				

Con base en la información de la tabla 30.3 y un análisis de sus modelos, contesten las siguientes preguntas.

i) ¿Cómo varía el volumen de las pirámides mientras se va aumentando el número de lados de los polígonos en la base? ______

ii) ¿De qué manera sugerirían calcular el volumen de un cono a partir de lo que han observado en el volumen de los prismas? Justifiquen su respuesta. ______

Compartan sus respuestas con las de otros equipos y describan en plenaria la forma de obtener el volumen de un cono de radio *r* y altura *h*. ______

El mundo en un tablero

Para familiarizarte con la relación que existe entre los volúmenes de un cilindro y un cono cuya radio de la base tienen la misma medida, visita el sitio https://www.geogebra.org/material/show/id/112210 (Consulta: 21 de enero de 2017.)

¿Qué conceptos mencionados en el sitio web se han analizado en esta lección? ______

¿Qué relación existe entre el volumen de un cono y un cilindro con el mismo radio de la base? ______

3. De acuerdo con la información de las tablas 30.2 y 30.3, completen la tabla 30.4. La cuarta columna se refiere al cociente entre el volumen del prisma y el volumen de la pirámide con el mismo número de lados en la base.

Tabla 30.4. Cociente de los volúmenes de un prisma y una pirámide con la misma base

Núm. de lados del polígono de la base	Volumen del prisma (cm³)	Volumen de la pirámide (cm³)	Cociente $\frac{\text{vol. prisma}}{\text{vol. pirámide}}$
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			

Elaboren en equipo una conclusión sobre la relación entre el volumen de un cilindro y un cono cuya base circular es *r* y tienen la misma altura *h*. ______

Contrasten su conclusión con la de otros equipos. Con la guía del profesor, reflexionen sobre los distintos puntos de vista y formalicen la relación entre los volúmenes del cono y el cilindro con el mismo radio y altura.

Analicemos la partida

Un problema de fondo y forma

Retoma la situación planteada en la sección "Jaque al rey".

a) ¿Cuál es el volumen del recipiente de Fernanda? ______

b) ¿Cuál es el volumen del recipiente de Manuel? ______

c) Si Fernanda vació su cisterna en 15 minutos, ¿cuánto tiempo le tomó a Manuel si ambos usan sus respectivos recipientes? ______

¿Para resolver el problema de "Jaque al rey" es necesario conocer la capacidad de los recipientes de Fernanda y Manuel? ______. ¿Por qué? ______

En tu cuaderno haz un repaso de la manera en que se aproximó el volumen del cilindro y el cono por medio de prismas y pirámides, respectivamente.

¿Es posible emplear la misma idea de aproximación para el cálculo de volúmenes de otros cuerpos geométricos? ______. Si tu respuesta es afirmativa, menciónalos ______

31. Estimación y cálculo del volumen de cilindros y conos

Contenido 5.4. Estimación y cálculo del volumen de cilindros y conos o de cualquiera de las variables implicadas en las fórmulas.

Jaque al rey

El siguiente proceso comienza a las...

La válvula de llenado de la tolva de la figura 1 deja pasar un litro de agua por segundo. Para continuar con el proceso, la tolva debe estar llena. En el reloj del laboratorio se observa la hora en que comienza a llenarse.

¿Aproximadamente a qué hora se llenará la tolva? ________
¿Cuánto debería medir la altura de la sección cilíndrica de la tolva, cuyo diámetro es de 1.6 m, si ésta sólo tuviera capacidad para 1 000 ℓ? ________

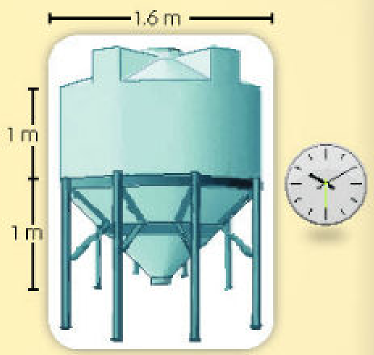


Figura 1

Apertura

▶ Estimación y cálculo del volumen de cilindros y conos

1. En el dispensador de la figura 2 se colocan dos tazas para ser llenadas.

a) Estima el número de tazas rojas que pueden llenarse con un solo garrafón. ________. Estima el número de tazas grises que se llenarían con un garrafón. ________

b) ¿La capacidad del garrafón es realmente de 20 ℓ como afirma la compañía vendedora? ________. Explica por qué. ________

Si en un momento determinado el garrafón contiene sólo 10 000 cm³ de agua, ¿qué altura alcanzará el nivel de agua? ________. Justifica tu respuesta. ________

Figura 2

2. El contenedor principal de un molino de café tiene forma de cono y el grano molido se almacena en el contenedor secundario, cuya forma es cilíndrica (figura 3).

a) ¿Estimas que la capacidad de ambos contenedores es la misma? ________. ¿Por qué? ________

b) Calcula la cantidad de café que cabe en el contenedor principal. ________

c) Determina la cantidad que cabe en el contenedor secundario. ________

d) Al moler café, ¿qué cantidad quedará en el contenedor principal cuando se llene el secundario? ________

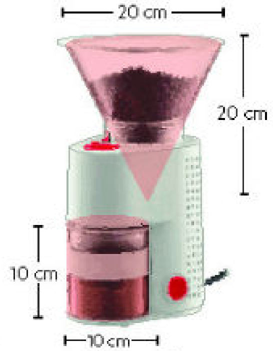


Figura 3

Compara tus resultados de las actividades 1 y 2 con los de otros compañeros y respondan en su cuaderno las siguientes preguntas.

- ¿Qué estrategias siguieron para responder el inciso *d* de la actividad 2? ________
- Dados el volumen de un cilindro y el radio de su base, escriban la expresión algebraica para calcular la altura. ________
- Escriban la expresión algebraica para calcular la altura de un cono en función de su volumen y radio. ________

3. Con la guía de su maestro, organicen una sesión plenaria para responder las siguientes preguntas.

Para el molino de café de la figura 3 se quiere comprar un contenedor secundario que tenga la misma capacidad que el contenedor principal.

a) Si se desea conservar el mismo radio, ¿cuánto tiene que medir la altura? ________
¿Por qué? ________

b) Si lo que se desea es conservar la misma altura, ¿cuánto tiene que medir el radio? ________. Expliquen su respuesta. ________

c) Si se opta por cambiar el contenedor principal, ¿cuánto debe medir el radio para que tenga la misma capacidad que el contenedor secundario? ________. ¿Por qué? ________

d) Si se mantiene el radio original, ¿cuánto tendría que medir la altura? ________. ¿Por qué? ________

En parejas planteen en su cuaderno, para el cilindro y el cono, dos situaciones similares a las anteriores. Intercambien sus propuestas con las de otra pareja. Contrasten sus expresiones algebraicas, y si hay discrepancias lleguen a un acuerdo sobre la respuesta correcta.

El mundo en un tablero

Para mejorar tus habilidades en el uso de herramientas tecnológicas y practicar el cálculo de volúmenes de cilindros y conos visita http://es.easycalculation.com/area/cylinder.php y http://es.easycalculation.com/area/cone.php (Consulta: 16 de junio de 2013.)

Comenta con tus compañeros la utilidad de emplear este tipo de herramientas. También puedes verificar los resultados obtenidos en los problemas que se han resuelto en la lección.

4. En equipos de tres alumnos analicen los cilindros de cartón mostrados en la figura 4.

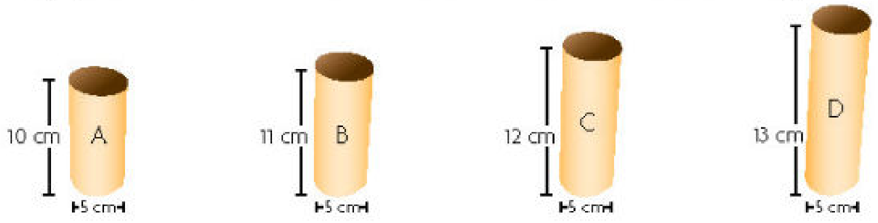


Figura 4

a) ¿Cuál de los cilindros tiene un volumen más próximo a los 216 cm^3? ______

b) ¿Cuál es la diferencia de volumen entre el cilindro A y el B? ______ ¿Y entre el B y el C? ______ ¿Y entre C y D? ______

¿Cómo son entre sí las diferencias de volumen entre cilindros de tamaño consecutivo? ______ Explica por qué. ______

5. Uno de los recipientes de cartón de la figura 5 se usará como molde para hacer un cilindro de yeso de 10 cm de altura.

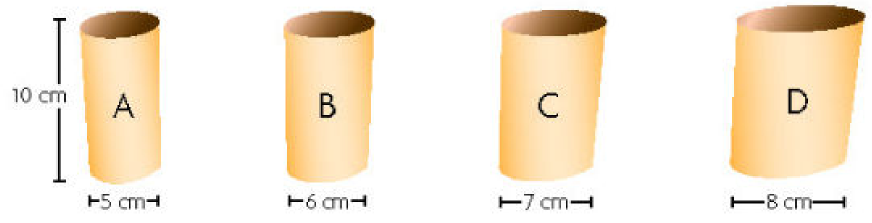


Figura 5

a) Si se tienen 503 cm^3 de yeso preparado, ¿cuál debe elegirse para desperdiciar la menor cantidad de material? ______ ¿Por qué? ______

b) Si los cilindros de la figura 5 están ordenados de acuerdo con su capacidad, ¿entre cuáles habría que colocar otro con la misma altura pero con una capacidad de 250 cm^3? ______ ¿Por qué? ______

c) ¿Cuánto tiene que medir el radio de un cilindro con el doble de volumen que el cilindro A, pero con la misma altura? ______

d) ¿Un cilindro de 12 cm de diámetro y 10 cm de altura tendrá el doble de volumen que el cilindro B? ______ Justifica tu respuesta. ______

Reúnete con otro compañero, analicen el caso general de un cilindro de radio *r* y altura *h*, y escriban las expresiones algebraicas correspondientes en cada inciso.

- ¿Qué volumen ocupa otro cilindro cuyo radio es del doble pero que conserva la misma altura? ______
- ¿Qué volumen ocupa otro cilindro cuya altura es del doble de la original pero que conserva su mismo radio? ______
- ¿Qué volumen ocupa un cilindro cuyo radio y altura son lo doble que los de un cilindro determinado? ______

7. El ángulo de inclinación de la generatriz respecto a la horizontal y la capacidad para girar hacen que los paneles fotovoltaicos en forma de cono absorban una mayor cantidad de luz solar. Cada uno puede transportarse en cajas cúbicas, como se muestra en la figura 6.

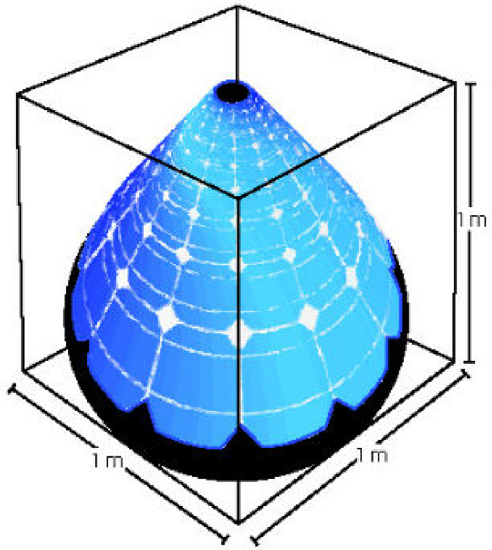


Figura 6

a) ¿Qué porcentaje del volumen del cubo es ocupado por el panel fotovoltaico? ______

b) Si el panel fotovoltaico tuviera forma cilíndrica y el mismo volumen, ¿cuáles serían sus dimensiones? ______

8. En parejas, analicen la secuencia de conos de la figura 7. ¿Cuál es la diferencia (hasta centésimos) de los volúmenes entre A y B? ______ ¿Y entre B y C? ______ ¿Y entre de C y D? ______

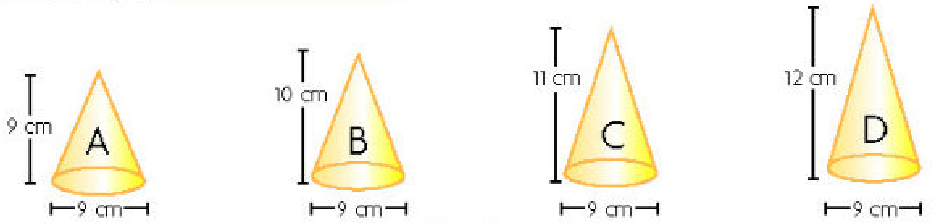


Figura 7

Si la altura de un cono aumenta y el radio se mantiene constante, ¿su volumen aumenta proporcionalmente? ______ ¿Por qué? ______

Analicen ahora la secuencia de conos de la figura 8. ¿Cuál es la diferencia (hasta centésimos) de los volúmenes entre A y B? ______ ¿Y entre B y C? ______ ¿Y entre de C y D? ______

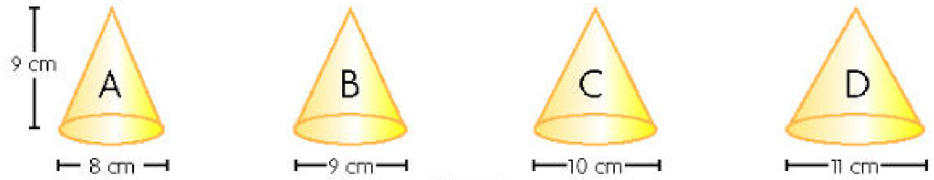


Figura 8

Si el radio de un cono aumenta y la altura se mantiene constante, ¿su volumen aumenta proporcionalmente? ________ ¿Por qué? ____________________

A partir de los resultados encontrados en esta actividad, elaboren, para un cono, una conclusión acerca de la relación entre el cambio de altura y volumen, y otra respecto al cambio de radio y volumen. ¿De qué manera podría servirles esta conclusión para estimar el volumen de un cono al modificar alguna de sus dimensiones? Expongan sus respuestas ante el grupo con el propósito de validarlas.

Analicemos la partida

El siguiente proceso comienza a las...

La tolva que se debe llenar está formada por dos cuerpos geométricos: un cilindro y un cono invertido.

a) ¿Cuál es el volumen del cilindro? ____________. ¿A cuántos litros equivale esta cantidad? ____________. ¿Qué tiempo deberá esperarse para que la sección cilíndrica se llene? ____________.

b) ¿Cuál es el volumen de la parte que corresponde al cono? ____________. ¿A cuántos litros equivale esta cantidad? ____________. ¿En cuánto tiempo se llenará la parte cónica? ____________.

c) ¿Qué hora marcará el reloj cuando la tolva se llene? ____________.

Reúnete con dos compañeros y escriban una expresión algebraica que indique la altura h del nivel del agua en la tolva respecto al tiempo t transcurrido desde que se abre la válvula.

____

Usen este modelo para verificar sus respuestas.

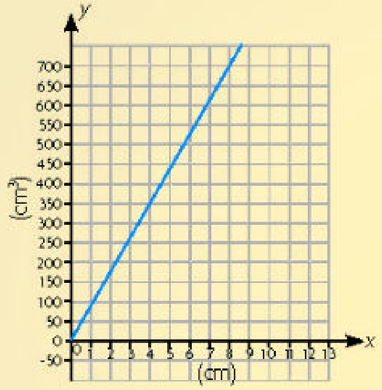
32. Variación lineal y cuadrática

Contenido 5.5. Análisis de situaciones problemáticas asociadas a fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas, en las que existe variación lineal o cuadrática entre dos conjuntos de cantidades.

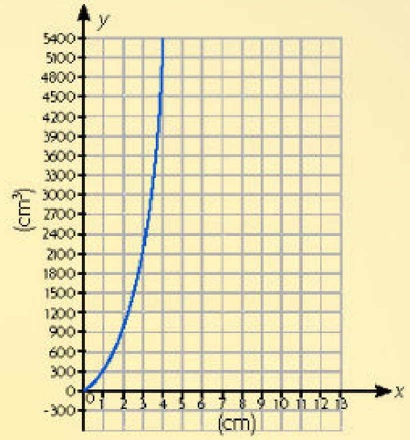
Jaque al rey

¿Vasos achaparrados o esbeltos?

A la diseñadora industrial de la lección 1 le pidieron producir una línea de vasos de diversos tamaños.



Gráfica 32.1. Capacidad de un vaso cilíndrico al variar su ____________ y mantener constante su ____________.



Gráfica 32.2. Capacidad de un vaso cilíndrico al variar su ____________ y mantener constante su ____________.

Está indecisa entre mantener el radio original de los vasos (de 4 cm) y modificar su altura o bien mantener la altura original (de 10 cm) y modificar su radio. Para no desperdiciar material y tener una idea de cómo varía la capacidad de los vasos cilíndricos, la diseñadora traza las gráficas 32.1 y 32.2. (Considera que el volumen V de un cilindro está dado por $V = \pi r^2 h$, donde r es el radio y h la altura.)

De las gráficas 32.1 y 32.2, ¿cuál corresponde a la relación entre el volumen y la altura? ________.
¿Por qué? ____________________.
De las gráficas 32.1 y 32.2, ¿cuál corresponde a la relación entre el volumen y el radio? ________.
Explica por qué. ____________________.
Completa el título de las gráficas 32.1 y 32.2 con las palabras *radio* o *altura*, según corresponda, y escribe los títulos de los ejes cartesianos. ____________. Justifica tu respuesta.
____

Apertura

Escritura de expresiones algebraicas que modelan situaciones

1. Las autoridades sanitarias de Tangamandapio distribuirán vitaminas a la población infantil de la localidad. La publicidad y la instalación del puesto de distribución tienen un costo de $15 000 y cada dosis de vitamina cuesta $10.

a) La situación puede modelarse mediante una expresión algebraica. ¿Crees que se trata de una ecuación lineal o una cuadrática? ____________________.

b) ¿La gráfica que representa esta situación será una recta o una curva? __________. Explica por qué. ____________________

c) ¿Pasaría por el punto (0, 0)? ____________________

d) Escribe una expresión algebraica que represente esta situación. ____________________.

e) ¿Es cierto que cuando $x = 850$, $y = 23\,500$? __________. Justifica tu respuesta. __________

____

2. Escribe una expresión algebraica que modele la relación entre la distancia recorrida por un móvil y el tiempo que tarda en recorrerla, según los datos de la tabla 32.1.

Tabla 32.1. Relación entre la distancia recorrida por un cuerpo y el tiempo que le toma

Tiempo (s)	0	1	2	3	4
Distancia (m)	0	4.9	19.6	44.1	78.4

a) Con la expresión algebraica que escribiste comprueba que cuando han transcurrido 5 s la distancia recorrida es de 122.5 m.

b) Si graficaras la situación, ¿se obtendría una recta o una curva? __________. ¿Pasaría por el punto (0, 0)? ____________________

c) Explica cómo averiguar cuántos segundos han transcurrido cuando la distancia recorrida es 592.9 m. ____________________

3. Para unir dos localidades, una carretera tendría que pasar por donde se encuentra un lago (gráfica 32.3). Con el fin de salvar este obstáculo, los ingenieros deciden construir ese tramo 200 m más al norte.

a) ¿Cuál es la expresión algebraica que modela la ubicación del tramo que se tenía pensado originalmente? ____________________

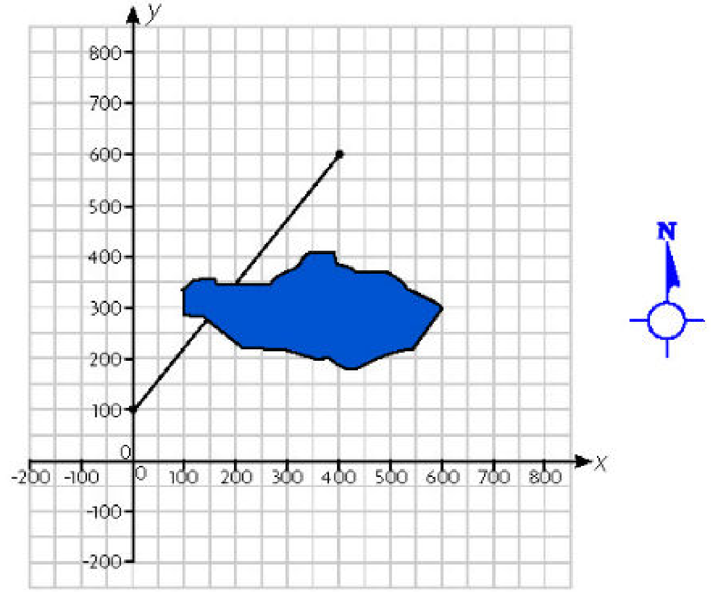
b) En la gráfica 32.2, traza la recta que representa el nuevo tramo de la carretera.

c) ¿Tienen la misma pendiente? __________. Explica cómo lo sabes. __________

____

d) ¿Cuál es la expresión algebraica que modela la ubicación del nuevo tramo de carretera?

____



Gráfica 32.3. Trazo original de la carretera que unirá dos localidades

Formen equipos de tres alumnos y comenten sobre las distintas formas de representar la información: de manera tabular, gráfica y algebraica. ¿Qué diferencias encuentran?

____

¿Cómo se complementan estos modos de representar la información? ____________________

____

¿Qué ventajas podría tener un modo respecto al otro? ____________________

____

Representación gráfica de diversas situaciones

2. En parejas, observen las siguientes expresiones y luego contesten las preguntas que se plantean.

$y = 2x - 1$ $\quad y = 8x$ $\quad y = 3x + 5$

$y = 2x^2$ $\quad y = -8x$ $\quad y = -\frac{1}{2}x^2$

a) Escriban las expresiones cuya gráfica es una línea recta. ____________________

____

b) De las expresiones que escribieron en el inciso *a*, ¿cuáles tendrán pendiente negativa?

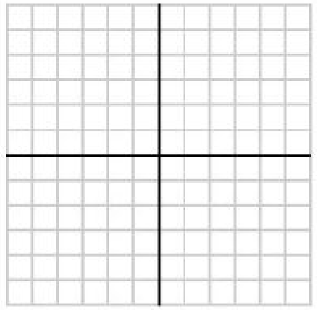
____

c) Escriban aquellas expresiones cuya gráfica pasa por el punto (0, 0). ____________________

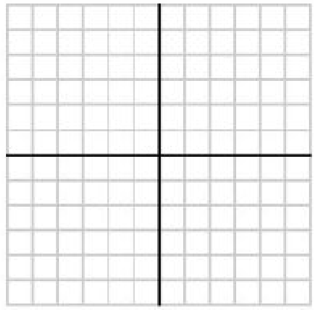
____

d) ¿Alguna expresión dará lugar a una gráfica formada por "pedazos"? __________. Si su respuesta es afirmativa, ¿cuál es? ____________________.

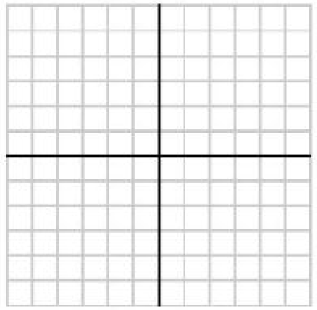
e) En los planos cartesianos 32.4-32.9 tracen la gráfica de la expresión algebraica indicada.



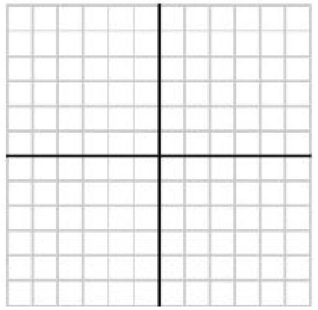
Gráfica 32.4. Gráfica de $y = 2x - 1$



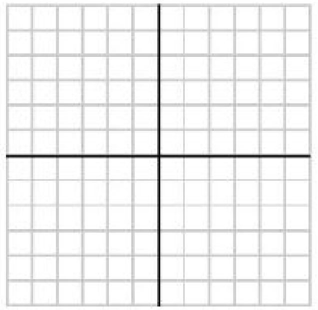
Gráfica 32.5. Gráfica de $y = 8x$



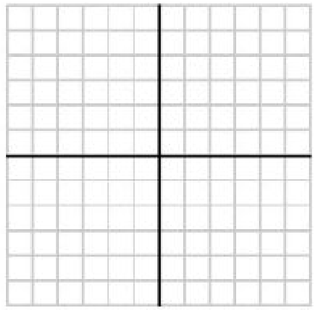
Gráfica 32.6. Gráfica de $y = 3x + 5$



Gráfica 32.7. Gráfica de $y = 2x^2$



Gráfica 32.8. Gráfica de $y = -8x$



Gráfica 32.9. Gráfica de $y = -\frac{1}{2}x^2$

Después de trazar las gráficas verifiquen que sus respuestas, en los incisos *a* a *d*, sean correctas. ¿Qué características tienen las expresiones que dieron lugar a gráficas curvas? ____________________

Al graficar las expresiones $y = 4x$ y $y = 4x + 6$ se obtienen rectas. ¿Cuál es la diferencia entre ellas? ____________________.

Un estudiante afirma que toda expresión lineal que contenga un signo menos "–" dará lugar a una gráfica con pendiente negativa. ¿Estás de acuerdo con él? ____________. ¿Por qué? ____________________.

3. Lee la situación que se plantea en el inciso *a* y relaciona con una línea cada una de las expresiones algebraicas del recuadro azul con la gráfica que le corresponde.

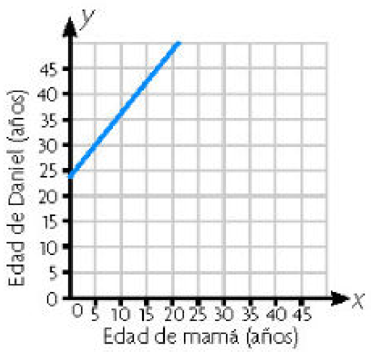
a) "Daniel nació cuando su mamá tenía 24 años. La edad de Daniel es *y*, mientras que la edad de su mamá es *x*."

Expresiones algebraicas

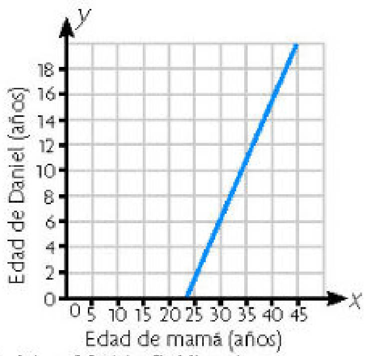
$y = 24x$

$y = x - 24$

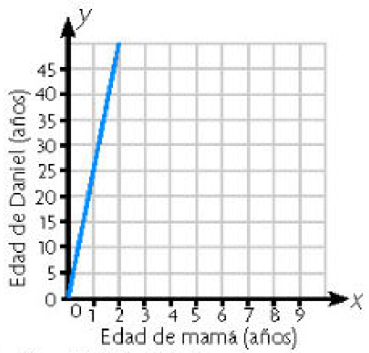
$y = x + 24$



Gráfica 32.10. Gráfica de ________.



Gráfica 32.11. Gráfica de ________.



Gráfica 32.12. Gráfica de ________.

i) Completa los títulos de las gráficas 32.10-32.12 con la expresión algebraica correspondiente entre las opciones dadas.

ii) Según la gráfica correcta, ¿cuántos años tendrá Daniel cuando su mamá tenga 35? ______. Usa la expresión que corresponde a dicha gráfica para verificar tu respuesta.

iii) Una alumna dice que cuando la mamá tenga 49 años, Daniel tendrá 25. ¿Estás de acuerdo? ____________. Usa la expresión que elegiste para ofrecer argumentos que justifiquen tu respuesta. ____________________.

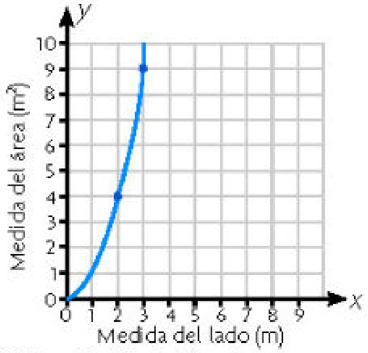
Reúnete con un compañero para analizar y responder la siguiente pregunta:

¿Qué tipo de representación prefieren para mostrar la relación entre las edades de Daniel y su mamá: una tabla, una gráfica o una expresión algebraica? ____________. Justifiquen su respuesta. ______________________________

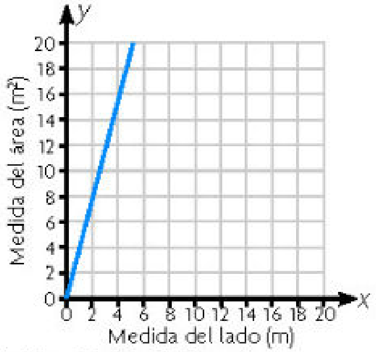
Lee la situación que se plantea en el inciso *b* y relaciona con una línea cada una de las expresiones algebraicas del recuadro verde con la gráfica que le corresponde.

b) "La relación entre la medida del lado de un cuadrado y su área. La medida del área del cuadrado es *y*, en tanto que la medida del lado es *x*."

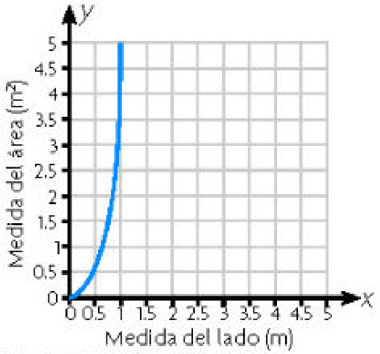
Expresiones algebraicas
$y = x^2$
$y = 4x$
$y = 4x^2$



Gráfica 32.13. Gráfica de ________.



Gráfica 32.14. Gráfica de ________.



Gráfica 32.15. Gráfica de ________.

i) Completa los títulos de las gráficas 32.13-32.15 con la expresión algebraica correspondiente entre las opciones propuestas.

ii) Según la gráfica correcta para la situación, ¿cuánto mide el área del cuadrado cuando el lado mide 3 cm? ________.
Usa la expresión que relacionaste para verificar tu respuesta. ________

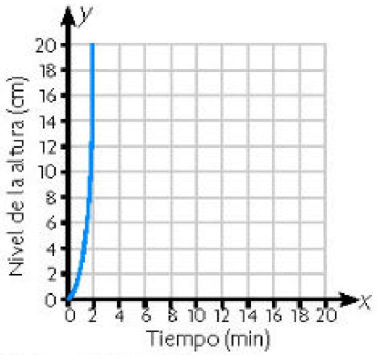
iii) ¿El punto (16, 256) pertenece a la gráfica que escogiste? ________.
Usa la expresión algebraica que elegiste para justificar tu respuesta. ________

Un alumno opina que la gráfica que representa la relación entre estos conjuntos de cantidades es de proporcionalidad directa, ya que cuando la medida del lado del cuadrado aumenta, también aumenta la medida de su área. ¿Estás de acuerdo con él? Comenta tus ideas con un compañero y escriban una respuesta entre los dos. ________

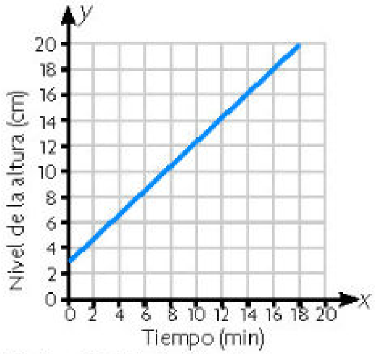
Lee la situación que se plantea en el inciso *c* y relaciona con una línea cada una de las expresiones algebraicas del recuadro amarillo con la gráfica que le corresponde.

c) "Al llenar un tinaco completamente vacío la altura del nivel del agua aumenta 3 cm por minuto. El nivel de la altura del agua es *y*, mientras que *x* es el tiempo."

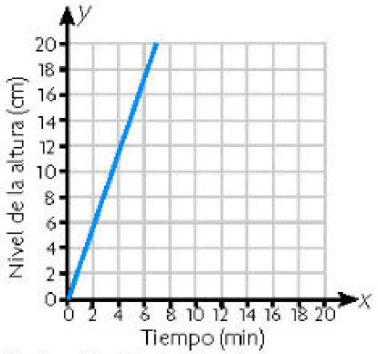
Expresiones algebraicas
$y = 3x^2$
$y = 3x$
$y = x + 3$



Gráfica 32.16. Gráfica de ________.



Gráfica 32.17. Gráfica de ________.



Gráfica 32.18. Gráfica de ________.

i) Completa los títulos de las gráficas 32.16-32.18 con la expresión algebraica correspondiente entre las opciones propuestas.

ii) Según la gráfica correcta, ¿cuántos centímetros sube el nivel del agua cuando han transcurrido cinco minutos? ________. Usa la expresión algebraica que le corresponde para verificar tu respuesta. ________

iii) Cuando ha transcurrido una hora, ¿cuántos centímetros habrá subido el nivel del agua? ________. Usa la expresión algebraica que elegiste para verificarlo. ________

Con la guía de su maestro, organícense en equipos para analizar y responder las preguntas.

- ¿Con la gráfica que eligieron puede saberse cuál es la altura del nivel del agua cuando ha transcurrido cierta cantidad de minutos o es necesario hacer una tabla? ______. Justifiquen su respuesta. ______
- Si ya se tiene la gráfica, ¿para qué puede servir conocer la expresión algebraica que representa esta situación? ______

d) "Un helicóptero deja caer una bolsa con ayuda humanitaria desde una altura de 500 m. En esta situación, y representa la altura de la bolsa respecto al piso, y x es el tiempo transcurrido."

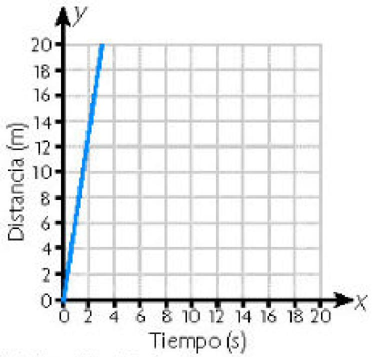
Completa los títulos de las gráficas 32.19-32.21 con la expresión algebraica correspondiente entre las opciones propuestas y relaciona con una línea de color distinto la expresión algebraica con la gráfica que la representa.

Expresiones algebraicas

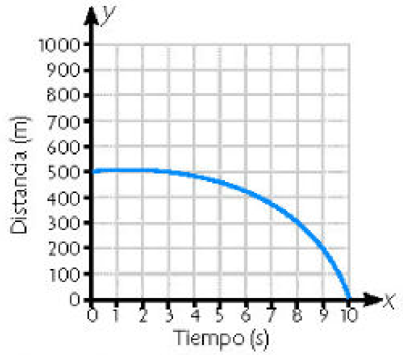
$y = -4.9x^2 + 500$

$y = 4.9x$

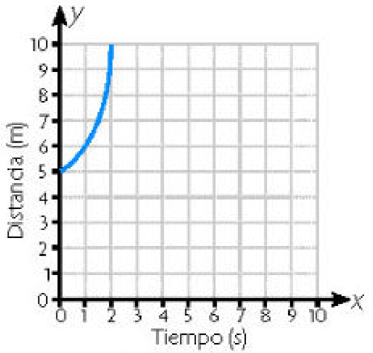
$y = x^2 + 4.9$



Gráfica 32.19. Gráfica de ______.



Gráfica 32.20. Gráfica de ______.



Gráfica 32.21. Gráfica de ______.

i) Según la gráfica correcta, ¿aproximadamente cuántos metros ha caído la bolsa cuando han transcurrido 8 s? ______. Usa la expresión algebraica que elegiste para verificar tu respuesta. ______

ii) ¿El punto (5, 400) pertenece a la gráfica? ______. Utiliza la expresión algebraica elegida para argumentar tu respuesta. ______

Una alumna afirma que en esta situación la gráfica debe "empezar" en 0 s en el eje de las abscisas (eje x) y que, tras cierto número de segundos, debe "llegar" a 0 m en el eje de las ordenadas (eje y), porque ése sería el momento en el que la bolsa choca contra al suelo. ¿Crees que tiene razón? ______. Coméntalo con algún compañero y lleguen a una conclusión. ______

Variación lineal y variación cuadrática entre dos conjuntos de cantidades

Si dos conjuntos de cantidades se relacionan de manera lineal o cuadrática, es posible representar esta relación de distintas maneras: mediante una tabla, una gráfica o bien con una expresión algebraica.

Cuando la variación es cuadrática la gráfica será una parábola, y en la expresión algebraica habrá un término de segundo grado. En situaciones como la de caída libre, el tiro parabólico y la aceleración, los conjuntos de datos presentan una variación cuadrática.

En el caso de la variación lineal, la gráfica será una recta (que pasará por el origen si la relación es de proporcionalidad directa) y en la expresión algebraica los términos serán de primer grado. La cantidad que debe pagarse por cierto número de productos, la velocidad constante y las relaciones a escala son situaciones en las que los conjuntos de datos varían de manera lineal.

De acuerdo con la información del recuadro "Variación lineal y variación cuadrática entre dos conjuntos de cantidades", escribe en tu cuaderno a qué tipo de variación corresponde cada una de las situaciones de los incisos *a*, *b*, *c* y *d* de la actividad 3. Justifica tus respuestas. ______

4. En parejas, plantee cada quien un problema cuyas cantidades se relacionen de la manera representada en las expresiones algebraicas de los incisos *a* y *b*. Anótenlas en una hoja aparte y después intercámbienlas. Deben decir a cuál expresión corresponde cada situación que escribió su compañero.

a) $y = x + 5$

b) $y = 5x$

¿Las situaciones que escribió su compañero corresponden a las expresiones algebraicas dadas? ______. Si no es así, cambien lo necesario para que las situaciones correspondan a las expresiones algebraicas.

Analicemos la partida

¿Vasos achaparrados o esbeltos?

Según la línea de vasos de la diseñadora, se sabe que:

- Una gráfica representa la relación entre la capacidad del vaso cilíndrico y la medida de su radio (con una altura constante igual a 10 cm).
- La otra gráfica representa la relación entre la capacidad del vaso cilíndrico y la medida de su altura (con un radio constante igual a 4 cm).
- La fórmula para obtener el volumen de un cilindro es $V = \pi r^2 h$.

Después de contestar las siguientes preguntas, pide a tu maestro que guíe una sesión en la que las respuestas se comenten en grupo.

a) Escribe la expresión algebraica que corresponde a cada gráfica (32.1 y 32.2) en la que la capacidad del vaso y está en función del radio x, cuando la altura del vaso se mantiene constante, o sea, siempre mide 10 cm. ____________.

b) En una de las gráficas, 32.1 o 32.2, la capacidad del vaso y se obtiene en función de su altura x, mientras que el radio permanece constante (igual a 4 cm). Escribe una expresión algebraica que modele esta situación. ____________.

c) ¿Las expresiones algebraicas que obtuviste en los incisos a y b corresponden a una variación lineal o cuadrática? ____________. Expliquen por qué ____________ ____________.

d) ¿En cuál de las gráficas, 32.1 o 32.2, al aumentar el valor de x al doble, el valor de y también aumenta al doble? ____________. ¿Es esta gráfica una recta o una curva? ____________.

Si en un cilindro la medida del radio aumenta al doble y la altura se mantiene constante, ¿la capacidad de dicho cilindro también aumenta al doble? ____________ ¿Por qué? ____________.

Si la medida de la altura aumenta al doble y el radio se mantiene constante, ¿la capacidad del cilindro también aumenta al doble? ____________. Justifica tu respuesta. ____________.

Escribe algunos ejemplos que ilustren las respuestas que diste. ____________

____

____

____________.

33. Resultados equiprobables y no equiprobables

Contenido 5.6. Análisis de las condiciones necesarias para que un juego de azar sea justo, con base en la noción de resultados equiprobables y no equiprobables

Jaque al rey

Lo que es parejo no es chipotudo[1]

Víctor y Luis tienen dos dados: uno numerado del 1 al 6 y el otro numerado del 1 al 4 (figura 1).

Quieren jugar con los dados de la figura 1 y deciden acordar dos reglas:

I. Tirar cada quien uno de los dados.

II. Si al sumar los números de las caras que quedan en las bases de ambos dados se obtiene una cantidad entre 1 y 5, gana Víctor; si la suma da entre 6 y 10, entonces gana Luis.

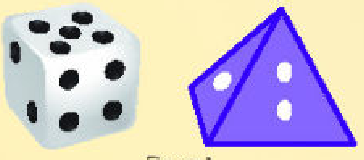


Figura 1

¿Quién tiene más probabilidad de ganar? ____________ ¿Por qué? ____________

____

¿Te parece un juego justo? ____________ ¿Por qué? ____________. Si consideras que no es un juego justo, ¿qué condiciones modificarías para que sí lo fuera?

____________.

Apertura

Análisis de resultados: equiprobables y no equiprobables

1. En un concurso se juega "Canicas iguales. Canicas distintas". En dos urnas se ponen canicas de colores como se indica en la figura 2.

a) Si se extrae una canica de cada urna, ¿es igualmente probable obtener dos canicas del mismo color que dos canicas de distinto color? ____________. ¿Por qué? ____________

b) ¿Por cuál de las opciones apostarías: sacar dos canicas del mismo color o sacar dos canicas de distinto color? ____________ Justifica tu respuesta. ____________

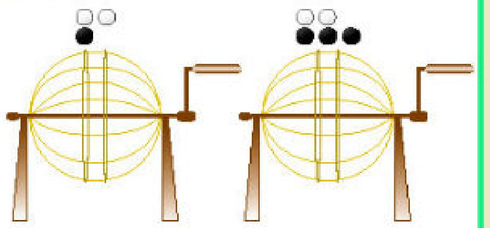


Figura 2

[1] Refrán popular cuyo significado designa que lo que es igual para todos no admite excepciones. También se usa para protestar por injusticias y tratos desiguales.

c) ¿Cuántos resultados posibles hay? ______________________________

d) ¿Cuál es la probabilidad de obtener dos canicas del mismo color? __________ ¿Y la de obtener dos canicas de distinto color? ______________________________

e) ¿Cómo completarías el diagrama de árbol de la figura 3 para verificar tus respuestas?

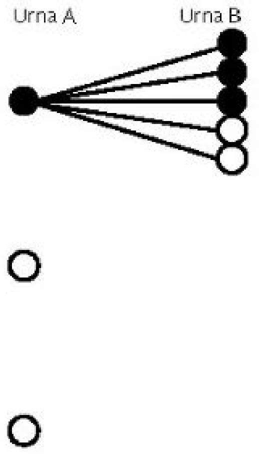


Figura 3

Señala si consideras correcta o incorrecta cada una de las afirmaciones y explica por qué.

- "Es igualmente probable obtener dos canicas del mismo color que obtener dos canicas de distinto color, porque en la urna A 'sobra' una canica blanca y en la urna B 'sobra' una canica negra. Esta situación compensa la probabilidad de obtener dos canicas del mismo color o bien obtener dos canicas de distinto color."

CORRECTA INCORRECTA

Explicación: ______________________________

- "Es más probable obtener dos canicas del mismo color, porque las canicas negras de las dos urnas son 4 y las canicas blancas también son 4."

CORRECTA INCORRECTA

Explicación: ______________________________

- "Es más probable obtener dos canicas de distinto color, porque en la urna A hay más blancas que negras, y en la B hay más negras que blancas."

CORRECTA INCORRECTA

Explicación: ______________________________

2. Gabriela y Rebeca lanzan dos monedas al mismo tiempo. Si caen caras iguales, gana Gabriela y si caen caras distintas, gana Rebeca.

a) ¿Cuántos resultados posibles hay? __________ ¿Cuáles son? ______________________________

b) ¿Quién tiene más probabilidades de ganar? __________ ¿Qué probabilidad tiene de ganar esta persona? ______________________________

c) Dibuja en tu cuaderno un esquema para verificar tus repuestas.

En parejas, analicen la siguiente situación y respondan la pregunta que se plantea: "Si en vez de tener dos monedas sólo tuvieran una que lanzaran dos veces, ¿cambiarían sus respuestas a las preguntas de los incisos *a* y *b*?" ______________________________

Comparen su respuesta con las de otras parejas y lleguen a un acuerdo sobre cuál es la correcta.

Resultados equiprobables

Se dice que en una situación en la que interviene el azar, sus posibles resultados son equiprobables cuando tienen la misma probabilidad de ocurrencia.

Con base en el recuadro de información "Resultados equiprobables", ¿cuáles de las situaciones descritas en las actividades 1 y 2 tienen resultados equiprobables? ______________________________. ¿Por qué? ______________________________.

Modificación de las condiciones de juegos equiprobables y no equiprobables

3. Cristina y Alain juegan con una ruleta similar a la que se muestra en la figura 4. La flecha sirve para indicar en qué color de sector se detiene la ruleta después de haberla hecho girar.

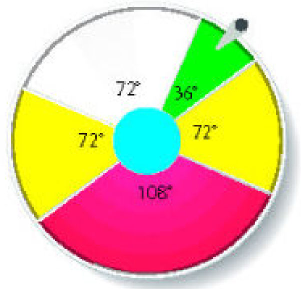


Figura 4

a) Cristina gana si la ruleta se detiene en el sector de color rojo o en el verde, y Alain si se detiene en amarillo o blanco. ¿El juego es justo? __________ ¿Por qué? ______________________________

b) Entre Cristina y Alain, ¿alguno tiene más probabilidad de ganar? __________ Si tu respuesta es afirmativa, ¿quién tiene más probabilidad? ______________________________

c) ¿Cuál es la probabilidad de ganar de cada uno? ______________________________

Si en lugar de hacer girar la ruleta una sola vez, Cristina y Alain lo hacen tres veces y deciden que el ganador sea aquel que gane dos de tres giros, ¿el juego sería justo con esta nueva regla? __________ ¿Por qué? ______________________________

Organicen una discusión entre todo el grupo y, con la guía de su maestro, lleguen a un consenso sobre la validez de las diferentes respuestas.

4. Leticia y Rocío juegan en una ruleta formada por diez sectores del mismo tamaño (figura 5) y eligen los mismos colores. Leticia gana si sale rojo o verde, y Rocío gana si sale amarillo o blanco.

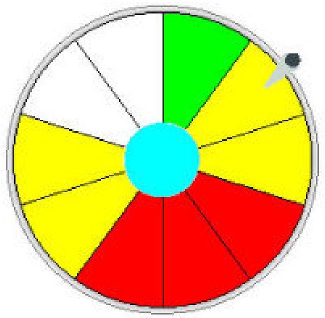


Figura 5

a) Completa la tabla 33.1 con la cantidad de sectores y las probabilidades correspondientes para que salga cada color en la ruleta.

Tabla 33.1. Probabilidades al jugar con la ruleta de diez sectores

	Núm. de sectores	Probabilidad de ocurrencia
Amarillo		
Rojo		
Verde		
Blanco		
Total		

b) ¿Cuántos resultados posibles hay al jugar con la ruleta de la figura 5? ______.

c) ¿Tienen Rocío y Leticia la misma probabilidad de ganar? ______.

Si no la tienen, ¿cuáles podrían ser las condiciones para que ambas tuvieran la misma probabilidad de ganar? ______

______.

Si Leticia jugara eligiendo sólo el color rojo y Rocío el blanco y el verde, ¿sería éste un juego justo? ______. ¿Cuál sería la probabilidad de que ninguna de las dos ganara? ______

5. Evelia y Óscar van a jugar en la ruleta de diez sectores (figura 5) y se cuestionan sobre algunas situaciones que pueden ocurrir en el juego.

Reúnete con un compañero y escriban una ✓ si la afirmación es correcta.

- ☐ Los posibles resultados que se obtienen de hacer girar la ruleta son equiprobables.
- ☐ Para que el juego sea justo, un jugador debe ganar si la ruleta se detiene en amarillo o rojo, y el otro jugador debe ganar si se detiene en blanco o verde.
- ☐ La probabilidad de que la ruleta se detenga en amarillo es mayor que la probabilidad de que se detenga en cualquier otro color, porque hay cuatro sectores amarillos.
- ☐ Para que el juego sea justo, un jugador debe ganar si la ruleta se detiene en amarillo o verde, y el otro jugador debe ganar si se detiene en blanco o rojo.
- ☐ La probabilidad de que se detenga en rojo es mayor que la de cualquier otro color, porque los sectores rojos están contiguos y eso aumenta la probabilidad.

Propongan una estrategia en la que uno de los jugadores pueda ganar alrededor de 90 de cada 100 partidas que juegue. ______

6. Emilio, Olga, Diana y Jesús juegan con una ruleta como la de la figura 6.

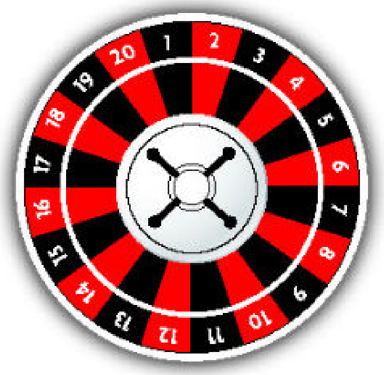


Figura 6

Los cuatro jugadores acuerdan que:

- Emilio gana si sale un número par que sea igual o menor que 10.
- Olga gana si sale un número igual o mayor que 11.
- Diana gana si sale un número negro.
- Jesús gana si sale un número impar que sea rojo.

a) ¿Todos los jugadores tienen la misma probabilidad de ganar? ______. Explica por qué ______

b) ¿Quién tiene la mayor probabilidad de ganar? ______.

c) ¿Quién tiene la menor probabilidad de ganar? ______.

d) Modifica las condiciones del juego para que todos tengan la misma probabilidad de ganar. ______

Una alumna afirma que en esta ruleta hay 20 resultados posibles y son equiprobables. ¿Estás de acuerdo? ______. Si es así, ¿todos los jugadores tienen la misma probabilidad de ganar? ______

Coméntalo con otros compañeros y, con la guía de su maestro, lleguen a un acuerdo.

El mundo en un tablero

Con el propósito de mejorar tus habilidades al decidir si el resultado de un juego de azar es justo, explora el siguiente video https://es.khanacademy.org/math/eb-3-secundaria/eb-ecuaciones-lineares-y-funciones-2/eb-modelando-con-ecuaciones-y-funciones-lineales-2/v/es-justo-pero-depende-del-azar-matemticas-khan-academy-en-espaol (Consulta: 21 de enero de 2017.)

Plantea otras condiciones para que los resultados del juego de monedas sean equiprobables. ¿Qué condiciones modificarías? ______.

Justifica tu respuesta. ______.

7. En equipos de tres alumnos lleven a cabo la siguiente actividad.

a) Diseña una ruleta de colores y redacta un conjunto de reglas de juego de manera que los resultados posibles sean equiprobables. Muestra tu diseño en la ruleta A de la figura 7 y escribe las reglas.

Ruleta A

Figura 7

Reglas:

i) ____________________

ii) ____________________

iii) ____________________

b) Diseña una ruleta de colores y redacta un conjunto de reglas de juego que deben seguir tres jugadores de modo que los resultados posibles no sean equiprobables. Muestra tu diseño en la ruleta B de la figura 8 y escribe las reglas.

Ruleta B

Figura 8

Reglas:

i) ____________________

ii) ____________________

iii) ____________________

Intercambien sus resultados con los de otros equipos y analicen las reglas de los juegos y las ruletas que proponen. ¿Cumplen con las condiciones pedidas en cada inciso? ____________________

Expliquen por qué los juegos propuestos por sus compañeros tienen resultados equiprobables o no equiprobables. ____________________

Analicemos la partida

Lo que es parejo no es chipotudo

Víctor y Luis lanzan dos dados: uno de seis caras numeradas del 1 al 6 y otro de cuatro caras numeradas del 1 al 4. Suman los números que caen en las bases; si el valor de la suma está entre 1 y 5 gana Víctor, mientras que si el valor de la suma está entre 6 y 10 gana Luis.

a) ¿Cómo completarías la tabla 33.2 sumando los posibles números que pueden caer en las bases de los dados para definir el espacio muestral del juego?

Tabla 33.2. Resultados de sumar los números que caen en dos dados

1	2	3	4	5	6
1					
2					
3					
4					

b) ¿Tienen ambos la misma probabilidad de ganar? ______

c) ¿Cuál es la probabilidad de que gane Luis? ______

d) ¿Cuál es la probabilidad de que gane Víctor? ______

e) Si el juego no es justo, propón una forma en la que sí lo sea. No puedes cambiar la forma de los dados ni la de seguir usando la suma de los valores en las bases. ______

______

Reúnete con dos compañeros para proponer un ejemplo y escribir un pequeño texto en el que expliquen cuáles son las condiciones que debe cumplir un juego de azar para que sea justo. Básate en el concepto de resultado equiprobable (revisa el recuadro de información "Resultados equiprobables").

Sentidos opuestos

SITUACIÓN 1

Una hormiga y una araña salen al mismo tiempo del vértice X de una pista rectangular (figura 1). La hormiga H avanza a una velocidad de $1\,\frac{cm}{s}$ en el sentido de las manecillas del reloj, mientras que la araña A camina a $3\,\frac{cm}{s}$ en sentido contrario al de las manecillas del reloj. ¿En qué lugar de la pista se encontrarán?

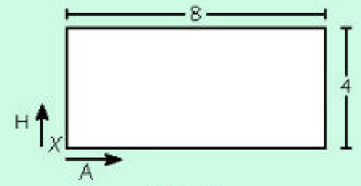


Figura 1

Crédito total: Da la respuesta correcta. Plantea una estrategia adecuada para encontrar la posición.
Crédito parcial: Su estrategia es correcta, pero comete un error en los cálculos.
Sin crédito: Usa una estrategia incorrecta.

Recortar para que embone

SITUACIÓN 2

Con un trozo de manguera de radio a se construye el diseño de la figura 2.

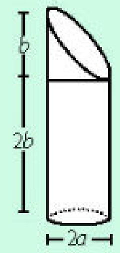


Figura 2

La expresión algebraica que representa el volumen de esta pieza es:

a) $\frac{3}{2}\pi a^2 b$ *b)* $\frac{5}{2}\pi a^2 b$ *c)* $\frac{7}{3}\pi a^2 b$ *d)* $3\pi a^2 b$

Crédito total: Da la respuesta correcta.
Sin crédito: Da una respuesta incorrecta.

Un final de *photo finish*

SITUACIÓN 3

En cierto instante, dos autos de juguete parten de un mismo punto en la misma dirección.

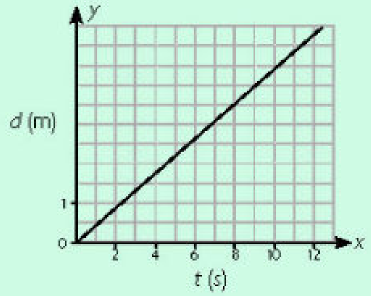
La distancia recorrida, en función del tiempo, del carro A se indica en tabla EP5.1.

Tabla EP5.1. Tiempo y distancia recorrida por el carro A

Tiempo (s)	Distancia (m)
0	0
1	0.1
2	0.4
3	0.9
4	1.6

La distancia del carro B está dada por la gráfica EP5.1.

Gráfica EP5.1. Tiempo y distancia recorrida por el carro B



Pregunta 1: La ecuación de la distancia, en función del tiempo, del carro A es:

i) $d = 0.1t$ *ii)* $d = 0.1t^2$ *iii)* $d = t^2$ *iv)* $d = 0.1 + t^2$

Crédito total: Da la respuesta correcta.
Sin crédito: Da una respuesta incorrecta.

Pregunta 2: La ecuación de la distancia, en función del tiempo, del carro B es:

i) $d = t$ *ii)* $d = 2t$ *iii)* $d = t^2$ *iv)* $d = 0.5t$

Crédito total: Da la respuesta correcta.
Sin crédito: Da una respuesta incorrecta.

Pregunta 3: En el tiempo $t = 3$ s, ¿qué carro ha recorrido mayor distancia?

Crédito total: Da la respuesta correcta.
Crédito parcial: Su estrategia es correcta, pero comete un error en los cálculos.
Sin crédito: Usa una estrategia incorrecta.

Pregunta 4: ¿En qué tiempo la distancia recorrida por los dos autos es la misma?

Crédito total: Da la respuesta correcta.
Crédito parcial: Su estrategia es correcta, pero comete un error en los cálculos.
Sin crédito: Usa una estrategia incorrecta.

Pregunta 5: ¿Qué distancia han recorrido los carros en el tiempo encontrado en la pregunta 4?

Crédito total: Da la respuesta correcta.
Crédito parcial: Su estrategia es correcta, pero comete un error en los cálculos.
Sin crédito: Usa una estrategia incorrecta.

¿Par o non?

SITUACIÓN 4

"Pares y nones" es un juego entre dos personas. Cada jugador elige par o non. Luego, ambos jugadores sacan simultáneamente de atrás de su espalda una mano con uno, dos o tres dedos enhiestos. Si la suma de los dedos desplegados es par, gana el jugador que eligió par (en la figura 3*a* vienen dos ejemplos de suma par); y si es non, gana el otro jugador (en la figura 3*b* aparecen dos ejemplos de suma non).

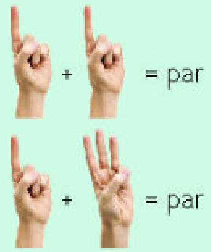


Figura 3*a*

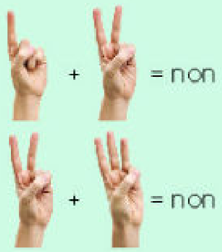


Figura 3*b*

Si jugaras "Pares o nones" con un compañero, ¿elegirías par, non o cualquiera de los dos? Explica tu respuesta.

Crédito total: Da la respuesta correcta y argumenta su estrategia.
Crédito parcial: Su estrategia es correcta, pero comete un error en el conteo.
Sin crédito: Su argumento es incorrecto.

Bibliografía

Para el estudiante

Álvarez Nebreda, José Alberto y Ginés García Soto, *Matemáticas. Guía práctica para la vida cotidiana*, Madrid, Alianza Editorial, 2001.

Bosch Giral, Carlos y Claudia Gómez Wulschner, *Una ventana a la incertidumbre*, México, Secretaría de Educación Pública-Santillana, 2002 (Libros del Rincón).

______, *Una ventana a las formas*, México, Secretaría de Educación Pública-Santillana, 2002 (Libros del Rincón).

______, *Una ventana al infinito*, México, Secretaría de Educación Pública-Santillana, 2002 (Libros del Rincón).

______, *Una ventana a las incógnitas*, México, Secretaría de Educación Pública-Santillana, 2002 (Libros del Rincón).

Burns, Marilyn, *¡Odio las matemáticas! Juegos, acertijos y experimentos matemáticos*, México, Trillas, 1994.

Cedillo, Tenoch, *Sentido numérico e iniciación al álgebra*, México, Iberoamérica, 1999.

García Arenas, Jesús y Celesti Bertrán Infante, *Geometría y experiencias*, México, Addison-Wesley/Longman, 1998.

Hernández Garciadiego, Carlos, *La geometría en el deporte*, México, Secretaría de Educación Pública-Santillana, 2002 (Libros del Rincón).

______, *Matemáticas y deportes*, México, Secretaría de Educación Pública-Santillana, 2002 (Libros del Rincón).

Hitt, Fernando, *Funciones en contexto*, México, Pearson Educación, 2002.

Langdon, Nigel y Charles Snape, *El fascinante mundo de las matemáticas*. México, Secretaría de Ecuación Pública, 1990 (Libros del Rincón).

Marván, Luz María, *Representación numérica*, Secretaría de Educación Pública-Santillana, 2002 (Libros del Rincón).

Millar, Charles D., Vern E. Heeren y Jonh Hornsby, *Matemática: razonamiento y aplicaciones*, México, Addison-Wesley Longman/Pearson, 1999.

Peña, José Antonio de la, *Geometría y el mundo*, México, Secretaría de Educación Pública-Santillana, 2002 (Libros del Rincón).

______, *Matemáticas en la vida cotidiana*, México, Secretaría de Educación Pública-Santillana, 2002 (Libros del Rincón).

Ruiz, Concepción y Sergio Régules, *Crónicas geométricas*, México, Secretaría de Educación Pública-Santillana, 2002 (Libros del Rincón).

______, *Crónicas algebraicas*, México, Secretaría de Educación Pública-Santillana, 2002 (Libros del Rincón).

Tahan, Malba, *El hombre que calculaba*, México, Secretaría de Educación Pública-Limusa-Noriega, 1990 (Libros del Rincón).

Para el maestro

Backhoff, Eduardo, *El aprendizaje del español y las matemáticas en la educación básica en México. Sexto de primaria y tercero de secundaria*, México, Instituto Nacional de Evaluación Educativa, 2006.

Callejo, María Luz, *Un club matemático para la diversidad*, Madrid, Nancea, 1994.

Carraher, Terezinha, David W. Carraher y Analucía D. Schliemann, *En la vida diez, en la escuela cero*, México, Siglo XXI, 2004.

Chamorro, María del Carmen, *Didáctica de las matemáticas para la educación secundaria*, Madrid, Pearson Educación, 2005.

Chevallard, Yves, Marianna Bosch y Joseph Gascón, *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje*, México, Secretaría de Educación Pública, 1997 (Biblioteca para la Actualización del Maestro).

Clark, David, *Evaluación constructiva en matemáticas*, México, Grupo Editorial Iberoamérica, 2002.

Courant, Richard y Herbert Robbins, *¿Qué son las matemáticas? Conceptos y métodos fundamentales*, México, Fondo de Cultura Económica, 2002.

López Rueda, Gonzalo, *Habilidades matemáticas en la educación básica. Algunas ideas para su desarrollo*, México, Grupo Editorial Iberoamérica, 2001.

Mancera, Eduardo, *Saber matemáticas es saber resolver problemas*, México, Iberoamérica, 2000.

Santos, Luz Manuel, *Principios y métodos en la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemática*, México, Grupo Editorial Iberoamérica, 1997.

Wentworth, Jorge y David Eugenio Smith, *Geometría plana y del espacio*, México, Porrúa, 2001.

Wnzelburger, Elfriede, *Calculadora electrónica*, México, Grupo Editorial Iberoamérica, 1993.

Bibliografía consultada por el autor

Arcavi, Abraham y N. Hadas, "Computer mediated learning: An example of an approach", en *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 5, 2000, pp. 25-45.

Duval, Raymond, "Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento", en Fernando Hitt, editor, *Investigaciones en matemática educativa II*, México, Grupo Editorial Iberoamérica, 1993.

Hitt, Fernando, "Le caractère fonctionnel des representations", en *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, Vol. 8, IREM de Estrasburgo, 2003.

Hitt, Fernando, A.S. González-Martín y C. Morasse, *Visualisation and students' functional representations in the construction of mathematical concepts. An example: the concept of co-variation as a prelude to the concept of function*, Monterrey, Group 12-ICME-11, 2008.

Sierpinska, Anna, *Sur la relativité des erreurs. The role errors play in the learning and teaching of mathematics*, en Informe del 39 Encuentro Internacional de la CIEAEM, Sherbrooke, Canadá, 1988.

Skemp, Richard, *Psicología del aprendizaje de las matemáticas*, 2a. ed., Madrid, Morata, 1993.

Steffe, Leslie, "The constructivist teaching experiment: Illustrations and implications", en Ernst von Glasersfeld, editor, *Radical constructivist in mathematics education*, Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, 1991, pp. 177-194.

Steffe, Leslie, Patrick Thompson y Ernst von Glasersfeld, "Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements", en R. Lesh y A. E. Kelly , editores, *Research design in mathematics and science education*, Hillsdale, Erlbaum, 2000, pp. 267-306.

Referencias electrónicas

http://recursostic.educacion.es/secundaria/edad/ (Consulta: 21 de enero de 2017.) Página del Instituto Nacional de Tecnologías Educativas y de Formación del Profesorado (INTEF) del Ministerio de Educación, Cultura y Deporte del Gobierno de España, que mantiene diversos recursos interactivos en el programa Descartes para el aprendizaje de las matemáticas.

http://www.dibujarfacil.com/perspectiva1.html (Consulta: 21 de enero de 2017.) Página abierta y gratuita con información útil para aprender a dibujar.

https://es.khanacademy.org/math/geometry/tools-of-geometry#intro-euclid (Consulta: 21 de enero de 2017.) Página donde encontrarás una introducción a la geometría euclidiana.

http://ventana.televisioneducativa.gob.mx/educamedia/telesecundaria/2/23/4/1356 (Consulta: 21 de enero de 2017.) Aquí encontrarás un video sobre los criterios de congruencia de polígonos.

http://ventana.televisioneducativa.gob.mx/educamedia/telesecundaria/2/23/2/1341 (Consulta: 21 de enero de 2017.) Aquí encontrarás un video sobre la presencia de los elementos geométricos en la vida diaria.

http://proyectodescartes.org/EDAD/materiales_didacticos/EDAD_4eso_semejanza-JS-LOMCE/index.htm (Consulta: 21 de enero de 2017.) Recurso interactivo sobre la semejanza de figuras geométricas.

http://ventana.televisioneducativa.gob.mx/educamedia/telesecundaria/2/23/4/1373 (Consulta: 21 de enero de 2017.) Recurso audiovisual sobre el tiempo de llenado de recipientes y la construcción de sus gráficas lineales correspondientes.

http://www.objetos.unam.mx/fisica/caidaLibre/index.html (Consulta: 21 de enero de 2017.) Ejercicios sobre la caída libre de los cuerpos.

http://www.monografias.com/trabajos15/estadistica/estadistica.shtml (Consulta: 21 de enero de 2017.) Información monográfica sobre conceptos básicos de estadística.

http://platea.pntic.mec.es/~anunezca/ayudas/factorizacion/factorizacion_polinomios.htm (Consulta: 21 de enero de 2017.) Se muestran los pasos básicos para factorizar polinomios y productos notables.

http://prometeo.matem.unam.mx/entregas/AprendeMxUNAM/ (Consulta: 21 de enero de 2017.) Portal que ofrece una gran cantidad de recursos interactivos digitales.

http://conteni2.educarex.es/mats/14393/contenido/ (Consulta: 21 de enero de 2017.) Aquí encontrarás una explicación de los movimientos de rotación y traslación de la Tierra.

http://arquimedes.matem.unam.mx/lite/2013/1.4_RepositorioLITE/sistema/?q=node/4482 (Consulta: 21 de enero de 2017.) Página con varios ejercicios de simetría.

http://www.educ.ar/dinamico/UnidadHtml__get__d77f8acf-7a06-11e1-831b-ed15e3c494af/index.html (Consulta: 21 de enero de 2017.) Una mirada a las matemáticas a través de la obra artística de M.C. Escher.

http://roble.pntic.mec.es/jarran2/cabriweb/1triangulos/teoremapitagoras.htm (Consulta: 21 de enero de 2017.) Página que muestra el teorema de Pitágoras y algunas de sus generalizaciones.

http://arquimedes.matem.unam.mx/lite/2013/1.4_RepositorioLITE/sistema/ (Consulta: 21 de enero de 2017.) Portal con una gran colección de recursos interactivos.

http://www.ceibal.edu.uy/UserFiles/P0001/ODEA/ORIGINAL/111107_teorema_pitagoras.elp/pitgoras_mucho_ms_que_un_teorema.html (Consulta: 21 de enero de 2017.) Video sobre la historia del teorema de Pitágoras.

http://proyectodescartes.org/iCartesiLibri/materiales_didacticos/IntroduccionEstadisticaProbabilidad/index.html (Consulta: 21 de enero de 2017.) Introducción a la estadística y a la probabilidad en Secundaria.

http://thales.cica.es./rd/Recursos/rd99/ed99-0161-02/ed99-0161-02.html (Consulta: 21 de enero de 2017.) Información relativa a la solución de ecuaciones de segundo grado.

http://prometeo.matem.unam.mx/recursos/Primaria/AprendeMxUNAM/ (Consulta: 21 de enero de 2017.) Recursos interactivos para el aprendizaje de las matemáticas.

https://www.geogebra.org/materials/ (Consulta: 21 de enero de 2017.) Se ilustran aplicaciones del software Geogebra para la enseñanza de las matemáticas.

http://www.telesecundaria.sep.gob.mx/ (Consulta: 21 de enero de 2017.) Sito de la SEP con interactivos enfocados a complementar los contenidos de las lecciones.

http://arquimedes.matem.unam.mx/lite/2013/1.4_RepositorioLITE/sistema/?q=node/4427 (Consulta: 21 de enero de 2017.) Recurso digital que ofrece una introducción a algunos conceptos básicos de la geometría.

http://proyectodescartes.org/Telesecundaria/materiales_didacticos/3m_b03_t05_s01-JS/index.html en la que se grafica el movimiento de un balón al ser lanzado. (Consulta: 21 de enero de 2017.) Recurso interactivo sobre gráficas de relaciones funcionales que modelan el movimiento de los cuerpos.

http://proyectodescartes.org/Telesecundaria/materiales_didacticos/3m_b03_t07_s01-JS/index.html (Consulta: 21 de enero de 2017.) Recurso interactivo sobre la interpretación y elaboración de gráficas por secciones.

http://proyectodescartes.org/Telesecundaria/materiales_didacticos/3m_b04_t01_s01-JS/index.html (Consulta: 21 de enero de 2017.) Recurso interactivo sobre las sucesiones cuadráticas.

http://www.educaplay.com/es/recursoseducativos/549493/pendiente_de_la_recta.htm (Consulta: 21 de enero de 2017.) Sitio con diversas actividades educativas para nivel básico.

http://concurso.cnice.mec.es/cnice2006/material098/geometria/geoweb/trigo1.htm (Consulta: 21 de enero de 2017.) Reactivos útiles para autoevaluar los conocimientos y habilidades en matemáticas.

https://www.geogebra.org/search/perform/search/homotecia (Consulta: 21 de enero de 2017.) Aquí podrás encontrar una serie de recursos digitales sobre la homotecia de figuras geométricas.

www.bunam.unam.mx/mat_apoyo/MaestrosAlumnos/mApoyo/01/Unidad_2/a10u2t02p07.html (Consulta: 21 de enero de 2017.) Se muestran diversos contenidos relativos al programa de secundaria.

http://www.acienciasgalilei.com/mat/problemas/ejerc1mat-sistecuaclin-1.htm (Consulta: 21 de enero de 2017.) Sitio con ejercicios útiles para desarrollar que permiten mejorar habilidades operativas.

https://es.khanacademy.org/math/geometry/transformations#concept-intro (Consulta: 21 de enero de 2017.) Página con información y ejercicios sobre la simetría axial y central, rotación y traslación.

http://recursostic.educacion.es/gauss/proc/ (Consulta: 21 de enero de 2017.) Página del Proyecto Gauss que brinda al profesor varios centenares de ítems didácticos y de applets de GeoGebra y otros recursos.

http://proyectodescartes.org/uudd/materiales_didacticos/Volumenes_d3-JS/VOLUMENES_3.htm (Consulta:21 de enero de 2017.) Recurso interactivo para calcular el volumen del cilindro variando la medida de su radio y altura.

http://proyectodescartes.org/uudd/materiales_didacticos/Volumenes_d3-JS/VOLUMENES_4.htm (Consulta: 21 de enero de 2017.) Recurso interactivo para calcular el volumen de pirámides y conos variando sus medidas.

http://www.ceibal.edu.uy/ Portal dedicado a la educación de niños y adolescentes mediante el uso de la tecnología. En esta página podrás encontrar diversos recursos digitales de matemáticas, además de una extensa biblioteca digital.

Créditos iconográficos

© Shutterstock.com: pp. 16, 17, 23, 31, 32, 37, 44, 53, 54, 68, 76, 77, 79, (ab.) 80, 82, 83, 85, 97, 110, 160, 168, (ab.) 169, 172-174, 186, 190, 191, 210, 218, 219, 221, 223, (ab.) 228.